ثنائي القطب RL

في هذا الدرس يجب أن أعرف:

1 - أنّ الوشيعة عنصر كهربائي يقاوم مرور التيار ويؤخّر تطبيقه، أي لها مقاومة (r) وتملك ذاتية (L) ؛ تسمى كذلك معامل تحريض الوشيعة.

2 - أنّ الوشيعة تتصرف كالناقل الأومي عندما يمر فيها تيار شدّته ثابتة (أي تيار شدّته لا تتعلّق بالزمن) .

3 - أنّ التوتر u_b بين طرفي الوشيعة هو مجموع توترين $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$

4 - أنّ الوشيعة تخزّن طاقة مغناطيسية، ولا يمكن استعمال هذه الطاقة غير مباشرة، أي عند فصلها من الدارة لا تحتفظ بهذه الطاقة.

5 - أنّه عند ربط وشيعة لطرفي مولد مثالي قوته المحركة الكهربائية E ، فإن التوتر بين طرفي الوشيعة يرتفع إلى أعظم قيمة $u_b = E$ ، ثم يشرع في التناقص إلى أصغر قيمة له $u_b = rI$ عند بداية النظام الدائم.

6 - أنّ عند قطع التيار عن الوشيعة تتحوّل الطاقة المغناطيسية فيها إلى طاقة كهربائية، وبالتالي إلى حرارة بفعل جول.

7 - كتابة المعادلة التفاضلية التي تخضع لها شدّة التيار الكهربائي.

8 - كيفية التحقّق من حل هذه المعادلة التفاضلية، واستنتاج المعادلتين الزمنيتين للتوتّر بين طرفي الناقل الأومي وبين طرفي الوشيعة.

9 - رسم البيانات بدلالة الزمن الخاصة بشدة التيار والتوتر بين طرفي الناقل الأومي والتوتر بين طرفي الوشيعة.

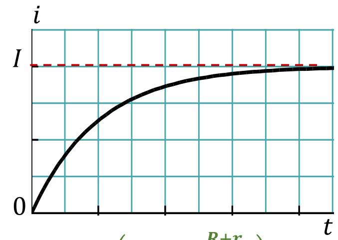
10 - كيفية استخراج ثابت الزمن من هذه البيانات.

11 - أن الطاقة المغناطيسية المخزّنة في وشيعة تتعلق بذاتية الوشيعة وبشدّة التيار $E_b = \frac{1}{2}Li^2$.

ملخّص الدرس

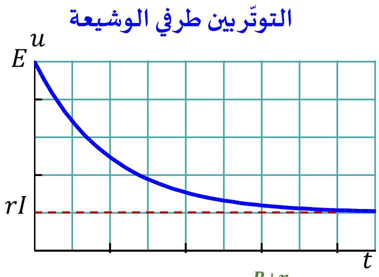
المعادلات الزمنية والرّسوم البيانية - تطبيق التيار:

شدّة التيار



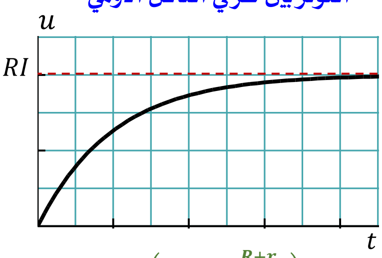
$$i = I\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$$

التوتّر بين طرفي الوشيعة



$$u_b = rI + RIe^{-\frac{R+r}{L}t}$$

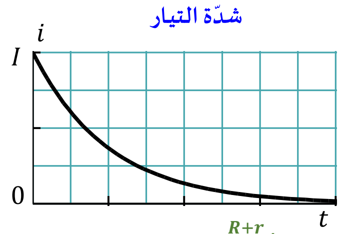
التوتّر بين طرفي الناقل الأومي



$$u_R = RI\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$$

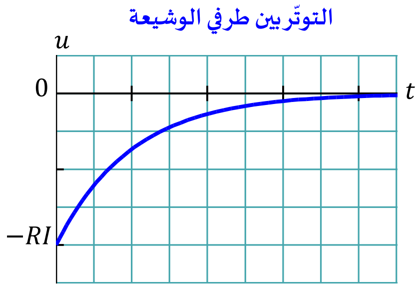
المعادلات الزمنية والرّسوم البيانية - قطع التيار:

شدّة التيار



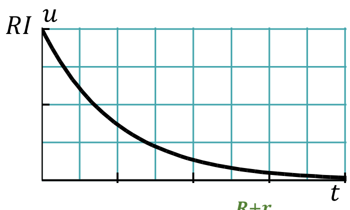
$$i = Ie^{-\frac{R+r}{L}t}$$

التوتّر بين طرفي الوشيعة



$$u_b = -RIe^{-\frac{R+r}{L}t}$$

التوتّر بين طرفي الناقل الأومي



$$u_R = RIe^{-\frac{R+r}{L}t}$$

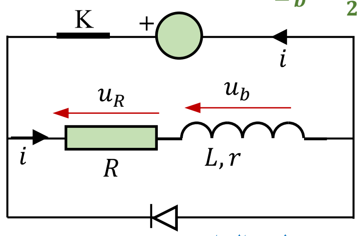
الطاقة المغناطيسية المخزّنة في الوشيعة: $E_b = \frac{1}{2}Li^2$

المعادلة التفاضلية - تطبيق التيار:

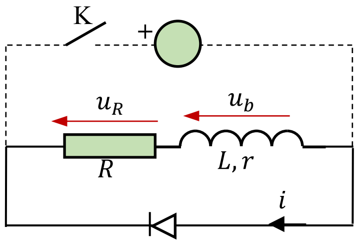
شدة التيار: $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}$

المعادلة التفاضلية - قطع التيار:

شدة التيار: $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = 0$



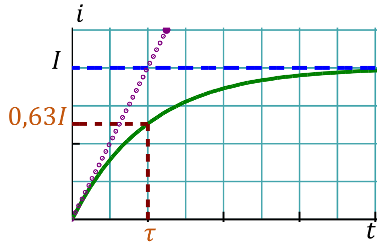
تطبيق التيار

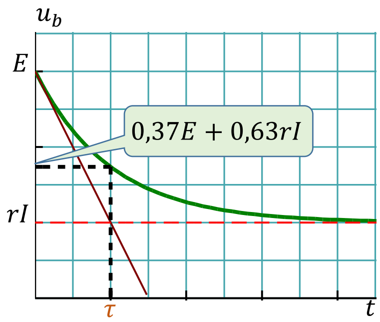


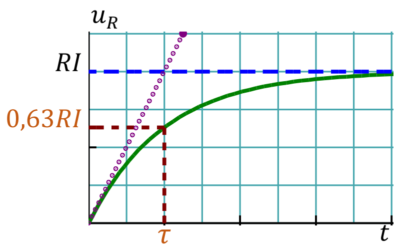
قطع التيار

ملاحظة: للحصول على المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر بين طرفي الناقل الأومي، عوّض i بـ $\frac{u_R}{R}$

ثابت الزمن: $\tau = \frac{L}{R+r}$ هو الزمن اللازم لتطبيق التيار إلى 63% من قيمته العظمى.







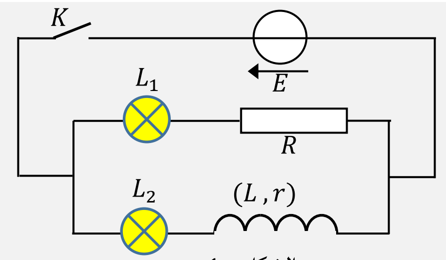
الدرس

1 - تجربة

نربط في دارة كهربائية مولدا للتوتر ومصباحين متماثلين وناقلا أوميّا مقاومته R ووشيعة مقاومتها r ، بحيث $R = r$ (الشكل - 1).

لما نغلق القاطعة نلاحظ:

- المصباح L_1 يشتعل عند اللحظة التي نغلق فيها القاطعة تقريبا (يشتعل آنيّا).
- المصباح L_2 يشتعل تدريجيا.
- بعد مدة قصيرة تصبح قوة الإضاءة في المصباحين متماثلة.



الشكل – 1

التفسير:

الوشيعة تؤخّر تطبيق التيار الكهربائي في مرحلة قصيرة، وبعد أن تصل قيمة شدة التيار إلى أعظم قيمة لها تصبح الوشيعة مجرد ناقل أومي، إذن نحدد نظامين، الأول انتقالي والثاني دائم بعد أن تصبح شدة التيار ثابتة.

إذن الوشيعة ليست مجرد ناقل أومي

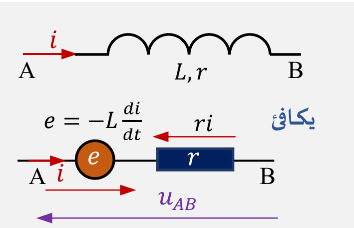
ملاحظة: الناقل الأومي يقاوم التيار(أي قيمة شدّة التيار تكون حسب قيمة مقاومة الناقل الأومي)، لكن لا يقاوم تغيّر التيار، أي أن قيمة الشدة التي يسمح بها الناقل الأومي بالمرور تمر بمجرد تطبيق التيار، أما الوشيعة لها خاصيتان : خاصية مقاومية وخاصية تحريضية، فهذه الخاصية الأخيرة تظهر في الوشيعة عندما يكون التيار يتغير، وبمجرّد أن يصبح التيار ثابتا تصبح للوشيعة مجرّد ناقل أومي.

2 – التوتر بين طرفي الوشيعة:

نركّب بين النقطتين A و B وشيعة مقاومتها r وذاتيتها L . (الشكل -2)

فإذا كانت شدّة التيار المار فيها i متغيّرة (أي $\frac{di}{dt} \neq 0$) ، تنشأ في الوشيعة قوة محركة كهربائية $e = -L\frac{di}{dt}$ ، وبالتالي يكون التوتّر بين طرفيها : $u_{AB} = ri - e$ ، $u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}$.

تكون خلال النظام الدائم شدة التيار ثابتة، وبالتالي $\frac{di}{dt} = 0$ ، ويكون تصرف الوشيعة هو تصرف ناقل أومي، فيصبح التوتر بين طرفيها: $u_{AB} = u_b = ri$



الشكل - 2

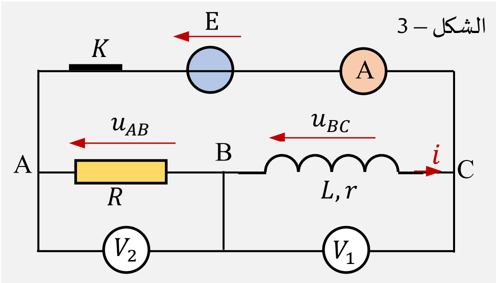
ملاحظة: إذا كانت مقاومة الوشيعة مهملة، نسمي الوشيعة عندئذ: وشيعة مثالية، أو وشيعة صافية.

دراسة ثنائي القطب RL

1 - الدراسة التجريبية

1 - 1 - النظام الدائم:

نركّب الدارة المبيّنة في الشكل - 3 باستعمال مولد للتوتر نعتبره مثاليا قوته المحركة الكهربائية $E = 4\,V$.



بعد غلق القاطعة K نتحصّل على النتائج التالية:

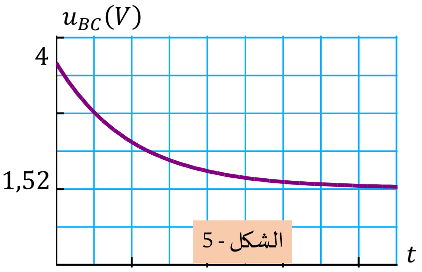
- إشارة مقياس الأمبير A : $I = 185\,mA$
- إشارة مقياس الفولط V_1 : $U_{BC} = 1{,}52\,V$
- إشارة مقياس الفولط V_2 : $U_{AB} = 2{,}47\,V$

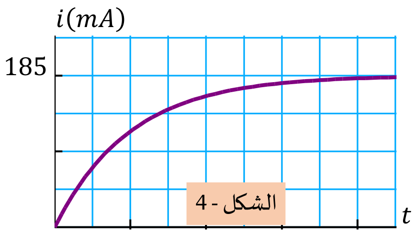
نستنتج من هذه القياسات: $r = \frac{U_{BC}}{I} = \frac{1{,}52}{0{,}185} = 8{,}2\,\Omega$

$$R = \frac{u_{AB}}{I} = \frac{2{,}47}{0{,}185} = 13{,}3\,\Omega$$

1 - 2 - النظام الانتقالي:

باستعمال نفس الدارة الكهربائية وإلحاقها بتجهيز خاص يسمح بمشاهدة تغيرات شدّة التيار بدلالة الزمن $i(t)$ والتوتر بين طرفي الوشيعة $u_{BC}(t)$ على جهاز كمبيوتر، نحصل على البيانين في الشكلين 4 و 5 .





نلاحظ:

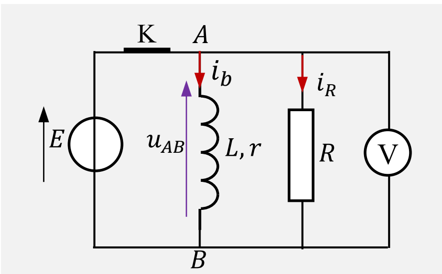
- شدة التيار في الدارة تتطوّر حسب علاقة أسيّة في الشكل - 4، وذلك من القيمة 0 إلى القيمة $185\,mA$ ، وهذه القيمة هي:

$$I = \frac{E}{R+r} = \frac{4}{13{,}3 + 8{,}2} = 0{,}186A$$

- التوتر بين طرفي الوشيعة يقفز مباشرة إلى القيمة 4 V (قيمة E) (في الشكل - 5)، ثم يشرع في التناقص إلى القيمة الحديّة $1{,}52\,V$. هذه القيمة للتوتر هي نفسها التي كانت بين طرفي الوشيعة خلال النظام الدائم وتمثل rI .

1 - 3 - قطع التيار في دارة الوشيعة:

نركّب في الدارة الكهربائية في الشكل - 6 ناقلا أوميا مقاومته $R = 1k\Omega$ على التفرّع مع وشيعة مقاومتها $r = 8\,\Omega$ وذاتيتها L . نستعمل مولدا مثاليا للتوتر $(E = 4V)$.



الشكل – 6

نغلق القاطعة K، فيشير مقياس الفولط إلى القيمة $E = 4V$.

نحسب شدة التيار في الفرعين في النظام الدائم:

- في الناقل الأومي: $I_R = \frac{E}{R} = \frac{4}{1000} = 4 \times 10^{-3}\,A$
- في الوشيعة: $I_b = \frac{E}{r} = \frac{4}{8} = 0{,}5\,A$

نرفع معيار مقياس الفولط تحسّبا لأي ارتفاع في التوترات، ثم نفتح القاطعة فنلاحظ إبرة مقياس الفولط تنحرف للجهة المعاكسة للجهة التي انحرفت فيها عند غلق القاطعة (صفر الجهاز يتوسط الواجهة)، وهذه القيمة أكبر بكثير من E ثم تعود للصفر.

تفسير الظاهرة:

عند فتح القاطعة ينعدم التيار في الناقل الأومي آنيا، لأن الناقل الأومي لا يؤخّر انعدام التيار، ويمر فيه التيار I_b ، حيث أن هذا الأخير لا ينعدم فجأة بل يتناقص تدريجيا (الوشيعة تؤخّر انعدام التيار فيها)، وبالتالي يبلغ التوتر بين طرفي الناقل الأومي قيمة كبيرة جدّا:

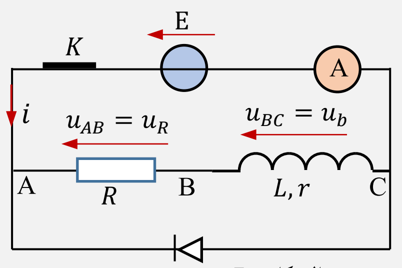
$$|u_{AB}| = Ri_b = 1000 \times 0{,}5 = 500V$$

2 - الدراسة النظرية:

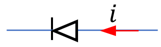
2 - 1 - تطبيق التيار:

نعتبر في كل ما يلي $R_T = R + r$ ، حيث R هي مقاومة الناقل الأومي و r هي مقاومة الوشيعة.

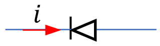
عند غلق القاطعة K في الشكل - 7 يمرّ التيار في الوشيعة والناقل الأومي، ولا يمرّ في الصمّام.



الشكل – 7



يُعتبر الصمّام قاطعة مهملة المقاومة ومغلقة



يُعتبر الصمّام قاطعة مفتوحة

الصمام الثنائي هو ثنائي قطب يمرّر التيار في جهة واحدة، وهي جهة السهم الذي يمثّل شكله.

2 - 1 - 1 - المعادلة التفاضلية لشدّة التيار:

قانون جمع التوترات: $u_b + u_R = E$

$ri + L\frac{di}{dt} + Ri = E$ ، وبالتالي: $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}$ أو $\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}i = \frac{E}{L}$ (1)

هذه المعادلة التفاضلية لها حل من الشكل: $i = Ae^{-\alpha t} + B$ (2)

حيث: A ، B ، α عبارة عن ثوابت تتعلّق بمميّزات عناصر الدارة.

لكي نحدّد B و α نعوّض في المعادلة (1) : $i = Ae^{-\alpha t} + B$ ، و $\frac{di}{dt} = -A\alpha\, e^{-\alpha t}$ ، ويصبح لدينا :

$-A\alpha\, e^{-\alpha t} + \frac{R_T}{L}A\, e^{-\alpha t} + \frac{R_T}{L}B = \frac{E}{L}$ ، ومنه $A\, e^{-\alpha t}\left(-\alpha + \frac{R_T}{L}\right) + \frac{R_T}{L}B = \frac{E}{L}$.

لكي تكون هذه المساواة الأخيرة محقّقة، يجب أن يكون $-\alpha + \frac{R_T}{L} = 0$ ، وبالتالي $\alpha = \frac{R_T}{L}$

يكون لدينا حينئذ $\frac{R_T}{L}B = \frac{E}{L}$ ، ومنه $B = \frac{E}{R_T}$.

تحديد الثابت A : نستعمل الشروط الابتدائية، حيث عند اللحظة $t = 0$ يكون دائما $i = 0$ ، وبالتعويض في المعادلة (2):

$0 = A + B\, e^0$

ومنه $A = -B$ ، أي $A = -\frac{E}{R_T}$. العبارة الزمنية لشدة التيار هي: $i = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$

شدة التيار الأعظمي هي شدّة التيار في النظام الدائم، حيث $I = \frac{E}{R_T}$

2 - 1 - 2 - ثابت الزمن: هو الزمن $\tau = \frac{1}{\alpha}$ ، أي $\tau = \frac{L}{R+r}$ ، حيث بتعويض عبارة ثابت الزمن في المعادلة الزمنية (3) نجد

$i = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L} \times \frac{L}{R+r}}\right)$ ، ومنه $i = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-1}) = 0{,}63\, I$

ثابت الزمن هو الزمن اللازم لتطبيق التيار إلى نسبة $63\ \%$ من قيمته العظمى $I = \frac{E}{R_T}$.

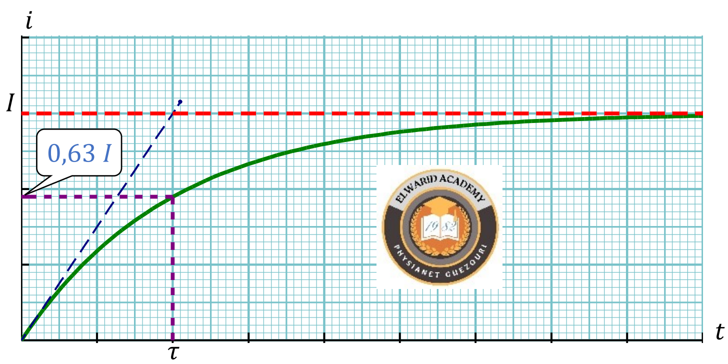
2 - 1 - 3 - التحليل البعدي لثابت الزمن:

لدينا $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$ ، وبالتالي الحدّ $L\frac{di}{dt}$ يُقاس بالفولط، $\left[L\frac{di}{dt}\right] = [U]$ ، وبالتالي $[L] = \frac{[U]\,[T]}{[I]}$ ، ولدينا $\tau = \frac{L}{R_T}$

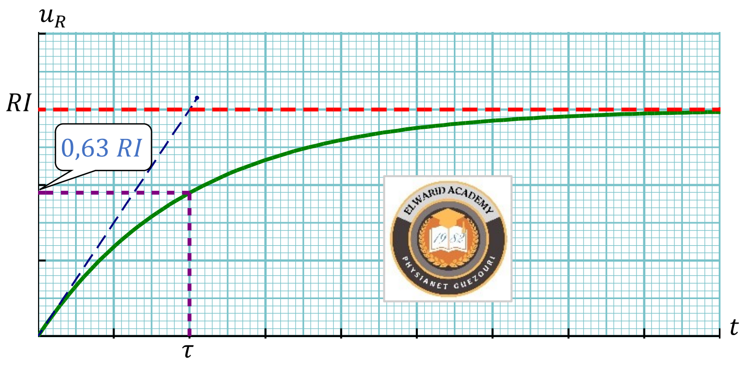
نكتب إذن: $[\tau] = \frac{\frac{[U]\,[T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = [T]$

2 - 1 - 4 - التمثيل البياني $i = f(t)$

- عندما $t = 0$: $i = 0$
- عندما $t = \tau$: $i = 0{,}63\, I$
- عندما $t \to \infty$: $i \to \frac{E}{R_T}$



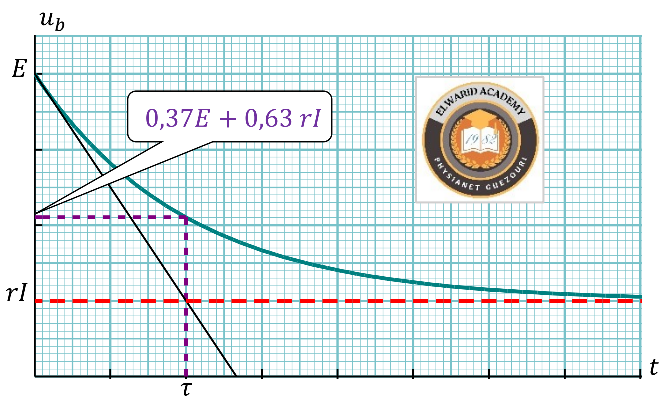
2 - 1 - 5 - التمثيل البياني $u_R = f(t)$



لدينا $u_R = Ri = R\frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$

- عندما $t = 0$: $u_R = 0$
- عندما $t = \tau$: $u_R = 0,63\,RI$
- عندما $t \to \infty$: $u_R \to R\frac{E}{R_T} = RI$

2 - 1 - 6 - التمثيل البياني $u_{BC} = u_b = f(t)$



لدينا $u_b = E - u_R$ ، أي $u_b = E - RI\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$u_b = E - RI - RIe^{-\frac{t}{\tau}}$

ولدينا $E - RI = rI$ ، وبالتالي : $u_b = rI + RIe^{-\frac{1}{\tau}t}$

- عندما $t = 0$: $u_b = E$
- عندما $t = \tau$:

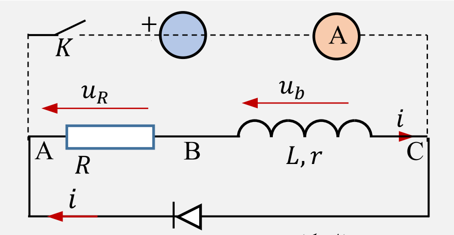
$u_b = 0,37(E - rI) + rI$

$u_b = 0,37E + 0,63rI$

- عندما $t \to \infty$: $u_b \to rI$

2 - 2 - قطع التيار:

2 - 2 - 1 - المعادلة التفاضلية لشدّة التيار:



الشكل - 8

لمّا تكون الدارة (الشكل - 8) في النظام الدائم، نفتح القاطعة عند اللحظة $t = 0$.
التيار الكهربائي يواصل في نفس الجهة ويمر في الصمّام.

قانون جمع التوترات: $u_b + u_R = 0$

$ri + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$ ، وبالتالي: $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = 0$ أو $\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}i = 0$ (3)

هذه المعادلة التفاضلية لها حل من الشكل: $i = Ae^{-\alpha\,t}$ (4)

حيث: A و α عبارة عن ثابتين يتعلّقان بمميّزات عناصر الدارة.

لكي نحدّد α نعوّض في المعادلة (3) : $i = Ae^{-\alpha\,t}$ و $\frac{di}{dt} = -A\alpha\,e^{-\alpha\,t}$ ، ويصبح لدينا :

$-A\alpha\,e^{-\alpha\,t} + \frac{R_T}{L}A\,e^{-\alpha\,t} = 0$ ، ومنه $A\,e^{-\alpha\,t}\left(-\alpha + \frac{R_T}{L}\right) = 0$.

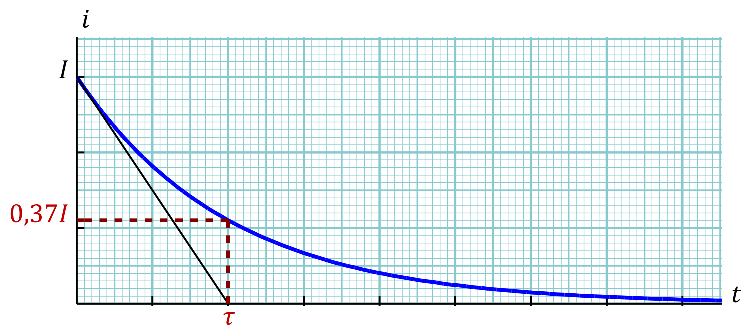
لكي تكون هذه المساواة الأخيرة محقّقة، يجب أن يكون $-\alpha + \frac{R_T}{L} = 0$ ، وبالتالي $\alpha = \frac{R_T}{L}$

تحديد الثابت A: نستعمل الشروط الابتدائية، حيث عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = \frac{E}{R_T}$ ، وبالتعويض في المعادلة (4): $\frac{E}{R_T} = A\,e^{0}$

ومنه $A = \frac{E}{R_T}$. العبارة الزمنية لشدة التيار هي

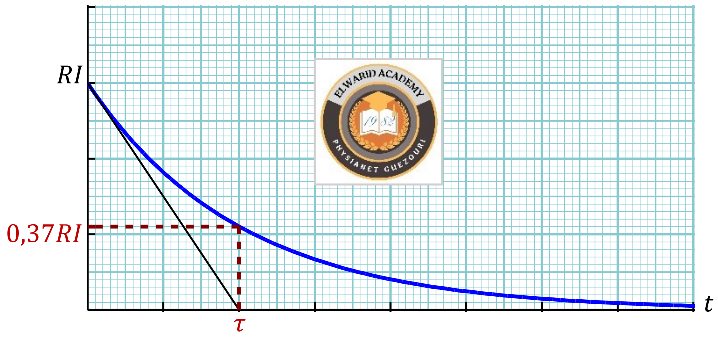
$i = \frac{E}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t}$

2 - 2 - 2 - التمثيل البياني $i = f(t)$



- عندما $t = 0$: $i = \frac{E}{R_T} = I$
- عندما $t = \tau$: $i = 0,37\,I$
- عندما $t \to \infty$: $i \to 0$

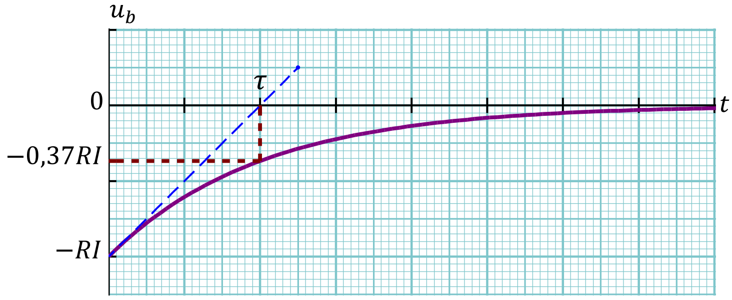
2 - 2 - 3 - التمثيل البياني $u_{AB} = u_R = f(t)$



لدينا $u_R = R\frac{E}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t} = RI\,e^{-\frac{R_T}{L}t}$

- عندما $t = 0$: $u_R = RI$
- عندما $t = \tau$: $u_R = 0{,}37\,RI$
- عندما $t \to \infty$: $u_R \to 0$

2 - 2 - 4 - التمثيل البياني $u_{BC} = u_b = f(t)$

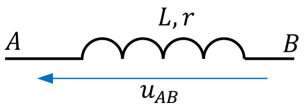


لدينا $u_b + u_R = 0$ ، وبالتالي $u_b = -RIe^{-\frac{1}{\tau}t}$

- عندما $t = 0$: $u_b = -RI$
- عندما $t = \tau$: $u_b = -0{,}37RI$
- عندما $t \to \infty$: $u_b \to 0$

2 - 3 - الطاقة المغناطيسية المخزنة في الوشيعة:

الاستطاعة الكهربائية التي تتلقاها الوشيعة، (الشكل - 9)، في كل لحظة هي $p = u_{AB}\,i$ ، ولدينا التوتّر بين طرفي الوشيعة هو:



الشكل - 9

هو $u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}$ ، وبالتالي $p = \left(ri + L\frac{di}{dt}\right) \times i$

$$p = ri^2 + i \times L\frac{di}{dt}$$

$p = ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ ، وهذه الاستطاعة هي مجموع استطاعتين هما $p_e = ri^2$ و $p_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ ، حيث أن:

p_e : استطاعة كهربائية توافق الطاقة المحوّلة إلى حرارة بفعل جول.

p_m : استطاعة توافق الطاقة المخزّنة في الوشيعة، ونعلم أن $p = \frac{dE}{dt}$ ، وبالتالي $E = E_b = \frac{1}{2}Li^2$ ، وهي **الطاقة المغناطيسية** التي تخزّنها الوشيعة وهي تتعلق بشدّة التيار المار في الوشيعة وذاتية الوشيعة: $E_b = \frac{1}{2}Li^2$

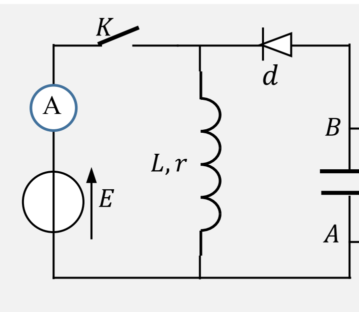
ملاحظة: أنت لست مطالبا بالبرهان على علاقة الطاقة، بل تستعمل العلاقة فقط. شدّة التيار تتعلق بالزمن، وبالتالي الطاقة لها عبارة زمنية كذلك.

الطاقة المحوّلة إلى حرارة بفعل جول من الوشيعة للدارة هي $E_d = E_{bm} - E_b(t)$

$$E_d = E_{bm} - \frac{1}{2}Li^2 = E_{bm} - E_{bm}\,e^{-\frac{2}{\tau}t} = E_{bm}\left(1 - e^{-\frac{2}{\tau}t}\right)$$

ملاحظة: عدم استعمال الصمام في الدارة في الشكل - 8 يؤدّي إلى تفريغ الطاقة من الوشيعة في مدّة قصيرة جدا بين فكّي القاطعة، وقد يؤدي هذا إلى اتلاف هذه الأخيرة. نلاحظ شرارة كهربائية بين فكّي القاطعة. تُعتبر القاطعة في هذه الحال مقاومة لا نهائية، ممّا يجعل مدة التفريغ قصيرة جدّا.

تجربة تبيّن أحد استعمالات الطاقة المغناطيسية المخزّنة في الوشيعة:



الشكل - 10

نركّب الدارة الموضحة في الشكل - 10:

الوشيعة: ذاتيتها $L = 11{,}4\ mH$ ومقاومتها r .

مولد التوتر: قوته المحركة الكهربائية $E = 6V$ ومقاومته مهملة (مثالي).

المكثّفة: سعتها $C = 5\mu F$.

- نغلق القاطعة K ، فيشير مقياس الأمبير في النظام الدائم إلى القيمة $I = 0{,}76A$. المكثفة لا تُشحنُ لأن الصمام يمنع مرور التيار لها.
- نفتح القاطعة فيشير مقياس الفولط إلى القيمة $u_{AB} = 28V$ ، فتُشحنُ المكثفة.

بعد فتح القاطعة، التيار يمر في الدارة في نفس الجهة التي كان يمر فيها قبل فتح القاطعة. الصمام يمنع تفريغ المكثفة في الوشيعة.

الطاقة المخزّنة في الوشيعة: $E_b = \frac{1}{2}LI^2$

الطاقة المخزنة في المكثفة بعد فتح القاطعة: $E_C = \frac{1}{2}Cu_{AB}^2$

مردود تحويل الطاقة هو: $\eta = \frac{E_C}{E_b} = \frac{C\,u_{AB}^2}{LI^2} = \frac{5\times10^{-6}\times(28)^2}{0{,}0114\times(0{,}76)^2} = 0{,}6$ ، وهذا يكافئ مردودا قدره $60\ \%$.

رغم أن المردود يظهر ضعيفا، إلا أننا استطعنا شحن المكثفة تحت توتر قدره $28\ V$ ، وهو أكبر بكثير من E

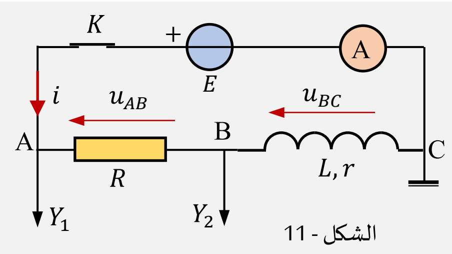
شُحنت المكثفة بالقوة المحركة الكهربائية التي نشأت في الوشيعة لحظة فتح القاطعة.

2 - 4 - أمثلة لربط راسم الاهتزاز في الدارة RL

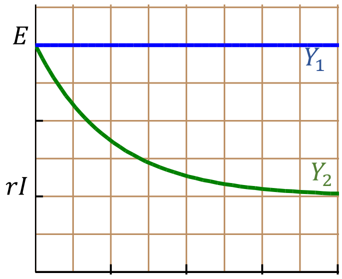
في الوصل الموضّح في الشكل - 11

في المدخل Y_1 نشاهد التوتر $u_{AC} = E$.

في المدخل Y_2 نشاهد التوتر u_{BC} بين طرفي الوشيعة.



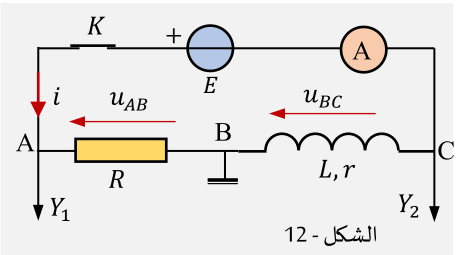
الشكل - 11



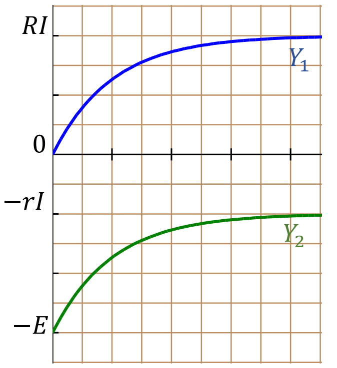
في الوصل الموضّح في الشكل - 12

في المدخل Y_1 نشاهد التوتر بين طرفي الناقل الأومي u_{AB} .

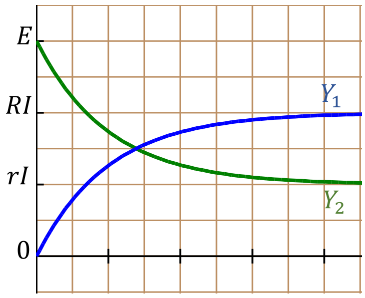
في المدخل Y_2 نشاهد التوتر $u_{CB} = -u_{BC}$ بين طرفي الوشيعة.



الشكل - 12



قبل الضغط على INV في المدخل Y_2

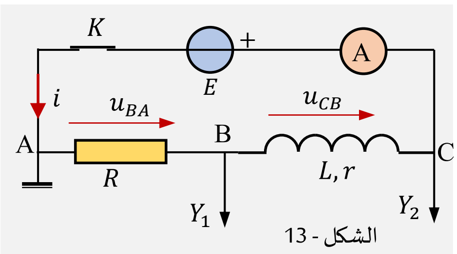


بعد الضغط على INV في المدخل Y_2

في الوصل الموضّح في الشكل - 13

في المدخل Y_1 نشاهد التوتّر بين طرفي الناقل الأومي u_{BA} .

في المدخل Y_2 نشاهد التوتّر $u_{CA} = E$.



الشكل - 13