ثنائي القطب RC

في هذا الدرس يجب أن أعرف:

1 - أن شحنة مكثفة تتعلق بالتوتر الذي شُحنت تحته. $Q = CU$

2 - أن المكثفة مخزّنٌ للشحن الكهربائية، وبالتالي للطاقة الكهربائية، وهذه الطاقة يمكن استعمالها غير مباشرة في دارة كهربائية أخرى.

3 - أنه عندما نشحن مكثفة بتيّار ثابت، فإن التوتّر بين طرفيها يزداد حسب تابع خطّي.

4 - أنه عندما نشحن مكثفة تحت توتر ثابت، فإن شدة التيار تمر مباشرة إلى قيمة عظمى، ثم تتناقص حسب تابع غير خطّي.

5 - أنه عندما نشحن مكثفة تحت توتر ثابت فإن التوتر بين طرفيها يتزايد حسب تابع غير خطّي، وأن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يتناقص حسب تابع غير خطّي كذلك إلى أن ينعدم.

6 - أنه عند تفريغ مكثفة في ناقل أومي فإن شدة التيار تمر مباشرة إلى قيمة عظمى سالبة، ثم تتناقص قيمتها حسب تابع غير خطّي، أمّا التوتر فيتناقص حسب تابع غير خطّي إلى أن ينعدم.

7 - كتابة المعادلات التفاضلية التي تخضع لها المقادير الثلاثة: التوتّرين طرفي المكثّفة، شحنة اللبوس الموجب للمكثّفة، شدّة التيار وبالتالي التوتّر بين طرفي الناقل الأومي، وذلك أثناء الشحن وأثناء التفريغ.

8 - كيفية التحقّق من حلول هذه المعادلات، ورسم البيانات الخاصة بها بدلالة الزمن.

9 - أن ثابت الزمن هو $\tau = RC$ ، وأنه متجانس مع الزمن.

10 - كل الطرق لاستخراج ثابت الزمن من كلّ البيانات.

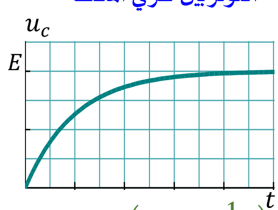
11 - أن الطاقة المخزّنة في مكثفة بعد شحنها تماما هي $E_C = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2C}q^2$.

ملخّص الدرس

المعادلات الزمنية والرّسوم البيانية:

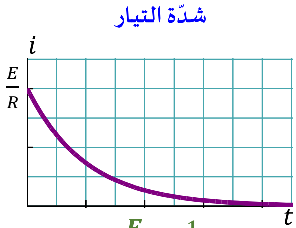
• شحن المكثفة:

التوتّرين طرفي المكثّفة



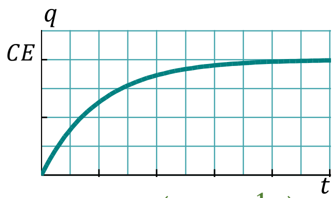
$u_C = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

شدّة التيار



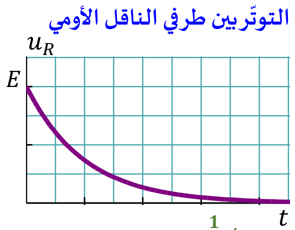
$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

الشحنة



$q = CE\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

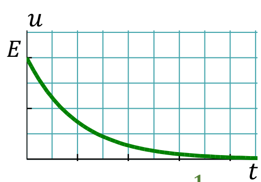
التوتّرين طرفي الناقل الأومي



$u_R = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$

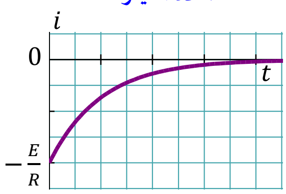
• تفريغ المكثفة:

التوتّرين طرفي المكثّفة



$u_C = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$

شدّة التيار

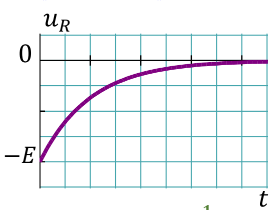


$i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

الشحنة

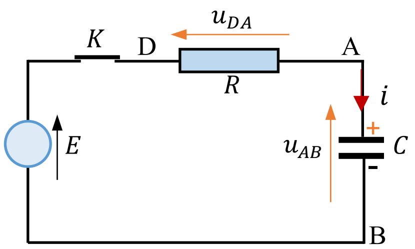
$q = CEe^{-\frac{1}{RC}t}$

التوتّرين طرفي الناقل الأومي



$u_R = -Ee^{-\frac{1}{RC}t}$

المعادلات التفاضلية

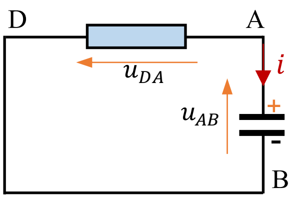


• شحن المكثفة:

$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$: $u_{AB} = u_C$

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$: q_A

$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$: i



• تفريغ المكثفة:

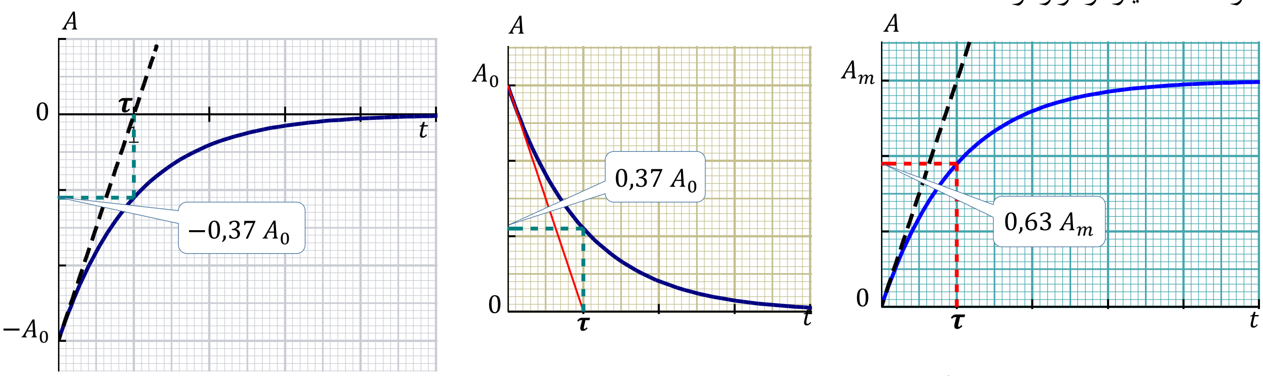
$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$: $u_{AB} = u_C$

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$: $q_A = q$ الشحنة

$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$: i

ثابت الزمن: $\tau = RC$ هو الزمن اللازم لشحن المكثّفة إلى النسبة 63% من شحنتها العظمى، أو الزمن اللازم لتفريغها إلى النسبة 37% من شحنتها العظمى.

المقدار A شدة تيار أو توتّر أو شحنة



الطاقة المخزّنة في مكثّفة: $E_C = \frac{1}{2}C\,u_{AB}^2$

- عند الشحن: $E_C = \frac{1}{2}CE^2\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)^2$

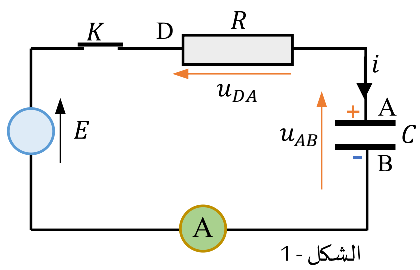
- عند التفريغ: $E_C = \frac{1}{2}CE^2 e^{-\frac{2}{\tau}t}$

الدرس

1 - شحن المكثفة

- قبل غلق القاطعة K يكون لبوسا المكثّفة في توازن إلكتروني (الشكل - 1)، حيث يكون لدينا نفس عدد الإلكترونات على اللبوسين؛ أيْ الإلكترونات التي تدور حول أنوية معدن اللبوسين.
- عندما نغلق القاطعة يقوم القطب الموجب للمولّد بسحب الإلكترونات من اللبوس A ويقوم بدفعها نحو اللبوس B ، وهذه العملية ليست منتظمة، لأن عملية الشحن تزداد صعوبة كلما اقتربت من نهايتها، وهذا ما يُبيّنه رجوع إبرة الأمبير متر نحو الصفر بعدما انحرف فجأة نحو قيمة عظمى. ولما تنعدم شدّة التيار تكون عملية الشحن قد انتهت. يُمكن فصل المكثّفة من الدارة وتبقى مشحونة.
- عندما يكتمل الشحن تكون شحنة كل لبوس عظمى: $Q_B = -Q_A$

مجموع شحنتي اللبوسين دائما معدوما $Q_A + Q_B = 0$



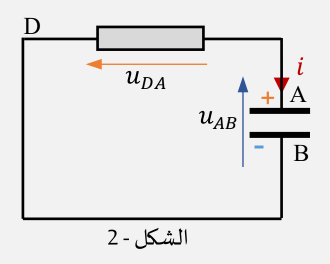
الشكل - 1

تعقيبات:

- الالكترونات لا يمكنها عبور العازل.
- أثناء الشحن، يشير مقياس الأمبير إلى تيار متغير، حيث ينعدم هذا التيار عند نهاية الشحن كما سبق أن ذكرنا ذلك. إذن يمكن تحديد نظامين هما:

النظام الإنتقالي: من لحظة غلق القاطعة إلى أن تنعدم شدة التيار.

النظام الدائم: بما أن شدة التيار انعدمت، إذن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يصبح معدوما كذلك لأن $u_{DA} = u_R = Ri$ ، وبالتالي يصبح التوتّر بين طرفي المكثّفة مساويا للتوتّر بين طرفي المولّد أي: $u_{AB} = u_C = E$



الشكل - 2

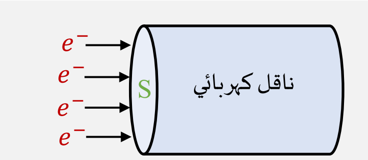
2 - تفريغ المكثفة:

نعزل المكثفة عن المولّد وهي مشحونة ونربطها في دارة مع ناقل أومي (الشكل - 2).

في هذه الحال تعود الإلكترونات إلى أماكنها على اللبوسين لتحقيق التوازن الكهربائي، فيمر تيار في الدارة يسمى تيار التفريغ. (يخرج من A)

ينعدم هذا التيار لحظة **إفراغ المكثفة**، فيصبح التوتر بين طرفي المكثفة $u_{AB} = u_C = 0$ ، وبين طرفي الناقل الأومي $u_{DA} = u_R = 0$.

3 - نمذجة المكثفة:



الشكل - 3

أ - تعريف: شدة التيار الكهربائي هي كمية الكهرباء التي تمر عبر المقطع (S) لناقل كهربائي خلال ثانية واحدة. معنى هذا أن شدة التيار تتعلق بعدد الإلكترونات التي تمر عبر المقطع خلال ثانية واحدة. ونعلم أن هذا العدد من الإلكترونات يحمل كمية من الكهرباء $|q| = n \times q_e$

حيث: n هو عدد الإلكترونات و q_e هي شحنة الإلكترون. (الشكل - 3).

نكتب إذن شدة التيار كما يلي: $i = \frac{dq}{dt}$ (1)

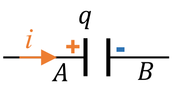
أي أن شدة التيار هي الكمية الصغيرة من الكهرباء dq التي تمر خلال المدة الزمنية الصغيرة dt ، وهذا مدلوله رياضيا هو مشتق كمية الكهرباء بالنسبة للزمن.

إذا كانت شدّة التيار ثابتة فإن صبيب الكهرباء يكون ثابتا عبر المقطع (S) وبالتالي $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ، حيث ΔQ هي كمية الكهرباء المارة خلال المدة الزمنية Δt .

ملاحظة:

في كل ما يلي نرمز للمقادير اللحظية، أي المقادير التي تتغير بتغيّر الزمن بالرموز الصغيرة (q, u, i)، ونرمز لقيمها العظمى بالرموز الكبيرة (Q, U, I) .

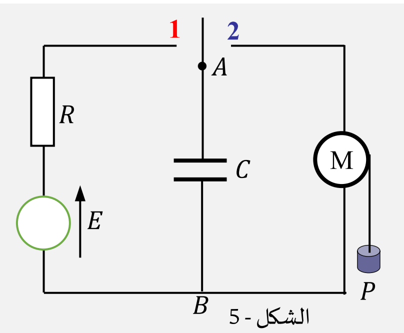
فيما يلي لما نقول شحنة مكثّفة q نقصد بها القيمة الموجبة للشحنة، وهي شحنة اللبوس A ، أي اللبوس الذي يصل له التيار الكهربائي i . (الشكل - 4)



الشكل - 4

ب - الطاقة المخزّنة في المكثّفة:

يمكن للمحرّك M أن يسحب الجسم P بواسطة خيط عندما يدور. (الشكل - 5). نصل البادلة (قاطعة ذات وضعيتين) للوضعية **1**، فيتمّ شحن المكثفة، ولما نصل البادلة للوضعية **2** نلاحظ صعود الجسم P ، دلالة على أن المكثفة خزّنت طاقة أثناء الشحن ثم قدمتها عند تفريغها للمحرك، مما جعل هذا الأخير يرفع الجسم P .



الشكل - 5

قام المحرّك بتحويل الطاقة الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية

الاستطاعة التي تقدمها المكثفة للدارة أثناء التفريغ هي p ، حيث:

$$p = u_{AB}\, i = u_{AB} \times C \frac{du_{AB}}{dt} = C \times u_{AB} \frac{du_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_{AB}^2\right)$$

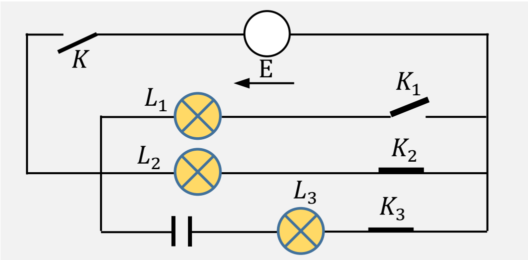
نعلم أن الاستطاعة هي مشتق الطاقة بالنسبة للزمن، أي $p = \frac{dE}{dt}$ ، ومنه الطاقة المخزنة في المكثفة هي: $E_C = \frac{1}{2} C u_{AB}^2 = \frac{1}{2} C u_C^2$ ، حيث E_C بالجول $(Joule)$.

دراسة ثنائي القطب RC

1 - تجربة:

نركب التجهيز في الشكل - 6 ، حيث نستعمل 3 مصابيح متماثلة ومولدا للتوتر يعطي تيارا مستمرا. عندما نغلق القاطعة K ، نلاحظ ما يلي:

- المصباح L_1 لا يشتعل
- المصباح L_2 يشتعل
- المصباح L_3 يشتعل ثم ينطفئ.



الشكل - 6

التفسير:

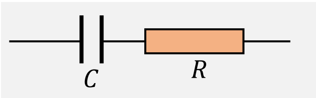
التيار لا يمر في L_1 ، لأن القاطعة K_1 مفتوحة.

التيار يمر في L_2 ، لأن القاطعة K_2 مغلقة .

التيار يمر في L_3 عند اللحظة التي نغلق فيها القاطعة الرئيسية K ، لأن شدة التيار في الفرع السفلي تنتقل من الصفر إلى أعظم قيمة ثم تعود تدريجيا للصفر ، حينها ينطفئ المصباح L_3 .

المكثّفة ليست مجرد قاطعة

لدراسة تطور التوتر بين طرفي المكثفة وشدة التيار في الدارة، نركب دارة بمولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ومكثفة سعتها C وناقل أومي مقاومته R . (الشكل - 7)

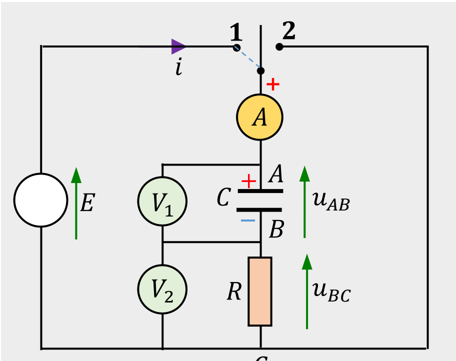


الشكل - 7

ثنائي القطب الذي ندرسه في هذا الجزء هو ناقل أومي موصول على التسلسل مع مكثفة، ونغذيهما بمولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E (الشكل - 7).

2 - أثناء شحن المكثّفة:

نضع البادلة على الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ في الدارة الممثّلة في الشكل - 8 .



الشكل - 8

مقياس الأمبير A : تنحرف إبرته إلى قيمة عظمى، ثم تعود تدريجيا إلى الصفر.

مقياس الفولط V_1 : تنحرف إبرته تدريجيا نحو أعظم قيمة هي E .

مقياس الفولط V_2 : تنحرف إبرته إلى قيمة عظمى، ثم تعود تدريجيا إلى الصفر.

نسجّل إثر ذلك نظامين:

النظام الانتقالي: يحدث التغيّر في قيم المقادير

النظام الدائم: تثبت قيم المقادير

2 - 1 - تطوّر التوترين لبوسي المكثّفة $(u_{AB} = u_C)$:

حسب قانون جمع التوترات: $u_{AB} + u_{BC} = u_{AC}$ ، أي $u_C + u_R = E$ (1)

ولدينا $q = C\,u_C$ ، وباشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن: $\frac{dq}{dt} = C\,\frac{du_C}{dt}$

وبالتالي $i = C\,\frac{du_C}{dt}$. وفي العلاقة (1) يصبح : $u_C + RC\,\frac{du_C}{dt} = E$ ، لأن $u_{BC} = u_R = Ri$ و $i = \frac{dq}{dt}$.

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية التي تميّز التوتر بين طرفي المكثّفة u_{AB} هي

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC} \qquad (2)$$

إن شكل حل المعادلة التفاضلية (2) هو: $u_C = Ae^{-\alpha\,t} + B$ (3)

A ، B ، α عبارة عن ثوابت غير معدومة، وهي ثوابت تتعلّق بمميّزات عناصر الدارة . (مميّزات عناصر الدارة هي E ، R ، C)

تحديد الثوابت α ، B ، A :

نشتق بالنسبة للزمن العبارة (3): $\frac{du_C}{dt} = -A\alpha\,e^{-\alpha\,t}$ ، ثم نعوّض في المعادلة التفاضلية (2)

$$-A\alpha\,e^{-\alpha\,t} + \frac{1}{RC}(Ae^{-\alpha\,t} + B) = \frac{E}{RC}$$

$$-A\alpha\,e^{-\alpha\,t} + \frac{A}{RC}e^{-\alpha\,t} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$A\,e^{-\alpha\,t}\left(\frac{1}{RC}-\alpha\right)+\frac{B}{RC}=\frac{E}{RC}$ ، ولكي تكون هذه المساواة محقّقة مهما كان الزمن، يجب أن يكون $\frac{1}{RC}-\alpha=0$

وبالتالي $\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{RC}}$

يكون كذلك $\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{RC}}=\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{RC}}$ ، وبالتالي $\boldsymbol{B=E}$.

نعيّن الثابت $\boldsymbol{A}$ بالشروط الابتدائية، أي نعتبر دائما عند اللحظة $\boldsymbol{t=0}$ المكثّفة فارغة، وبالتالي $\boldsymbol{u_C=0}$ ، وبالتعويض في (3)

$\boldsymbol{0=Ae^{-\alpha\times 0}+B}$ ، أي $A+B=0$ ، ومنه $\boldsymbol{A=-E}$

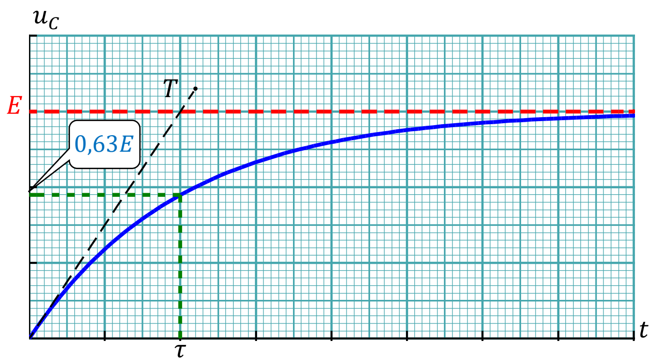
تصبح عبارة التوتر بين طرفي المكثّفة: $\boldsymbol{u_{AB}=E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$

ثابت الزمن: هو الثابت $\boldsymbol{\tau=RC}$ ، وهو متجانس مع الزمن، فإذا قمنا بتحليل بعدي لهذا الثابت، نكتب:

$$[\boldsymbol{\tau}]=[\boldsymbol{R}][\boldsymbol{C}]=\frac{[\boldsymbol{U}]}{[\boldsymbol{I}]}\times\frac{[\boldsymbol{I}]\times[\boldsymbol{T}]}{[\boldsymbol{U}]}=[\boldsymbol{T}]$$

وبالتالي ثابت الزمن متجانس مع الزمن، أي يقاس بالثانية $(\boldsymbol{s})$ ، حيث $[\boldsymbol{T}]$ تُعنى البعد أما الوحدة هي الثانية $(\boldsymbol{s})$.

التمثيل البياني $\boldsymbol{u_C=f(t)}$:



لدينا $u_{AB}=E\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$

عند $\boldsymbol{t=0}$: $u_C=E\,(1-1)=0$

عند $\boldsymbol{t=\tau}$: $u_C=E\,\left(1-\frac{1}{e}\right)=0{,}63\,E$

عندما $\boldsymbol{t}\to\infty$: $u_C\to E$

T هو المماس للبيان عند $t=0$.

2 - 2 - تطور شحنة المكثّفة $(\boldsymbol{q_A=q})$:

لدينا $q=C\,u_C=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

يمكن الحصول على العبارة الزمنية لشحنة المكثّفة باتباع نفس الطريقة التي وجدنا بها العبارة الزمنية للتوتر بين لبوسيها.

قانون جمع التوترات: $u_{AB}+u_{BC}=u_{AC}$ أي $u_C+u_R=E$

$\frac{q}{C}+R\,i=E$ ، $\frac{q}{C}+R\,\frac{dq}{dt}=E$ ، وبتقسيم الطرفين على R : $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=\frac{E}{R}$ (4)

إن شكل حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $q=Ae^{-\alpha\,t}+B$ (5)

مع العلم أن q هي شحنة اللبوس A ، أما α ، B ، A هي ثوابت تتعلق بمميزات عناصر الدارة الكهربائية. نشتق بالنسبة للزمن العبارة(5)

$\frac{dq}{dt}=-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}$ ، ثم نعوّض في المعادلة التفاضلية (4): $-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}+\frac{1}{RC}(Ae^{-\alpha\,t}+B)=\frac{E}{R}$

$$-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}+\frac{A}{RC}e^{-\alpha\,t}+\frac{B}{RC}=\frac{E}{R}$$

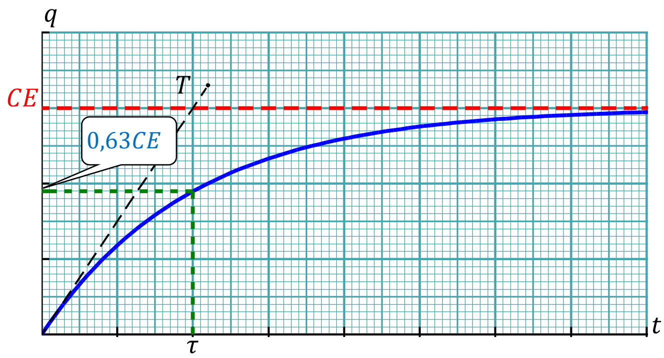
$A\,e^{-\alpha\,t}\left(\frac{1}{RC}-\alpha\right)+\frac{B}{RC}=\frac{E}{R}$ ، ولكي تكون هذه المساواة محقّقة مهما كان الزمن، يجب أن يكون $\frac{1}{RC}-\alpha=0$

وبالتالي $\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{RC}}$.

يكون كذلك $\frac{B}{RC}=\frac{E}{R}$ ، وبالتالي $\boldsymbol{B=CE}$.

نعيّن الثابت A بالشروط الابتدائية، أي نعتبر دائما عند اللحظة $t=0$ المكثّفة فارغة، وبالتالي $q=0$ ، وبالتعويض في (5)

$0=Ae^{-\alpha\times 0}+B$ ، أي $A+B=0$ ، ومنه $\boldsymbol{A=-CE}$ ، تصبح عبارة شحنة المكثّفة: $\boldsymbol{q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$



التمثيل البياني $q = f(t)$:

لدينا $q = CE\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$

عند $\boldsymbol{t = 0}$: $q = CE\,(1-1) = 0$

عند $\boldsymbol{t = \tau}$: $q = CE\,\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}63\ CE$

عندما $\boldsymbol{t} \to \infty$: $q \to CE$

T هو المماس للبيان عند $t = 0$.

2 - 3 - تطورشدّة تيار الشحن $\boldsymbol{i}$:

لدينا $i = C\,\frac{du_C}{dt}$ ، وبالتالي $i = C\,\times \frac{E}{RC}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، $i = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

يمكن الحصول على العبارة الزمنية لشدّة التيار باتباع نفس الطريقة التي وجدنا بها العبارة الزمنية للتوتر بين لبوسي المكثفة.

قانون جمع التوترات: $u_C + u_R = E$ ، وباشتقاق هذه العبارة الأخيرة بالنسبة للزمن نكتب: $\frac{du_C}{dt} + \frac{du_R}{dt} = 0$

$\frac{1}{C}\,\frac{dq}{dt} + R\,\frac{di}{dt} = 0$ ، ولدينا $\frac{dq}{dt} = i$ ، وبالتالي $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}\,i = 0$ (6)

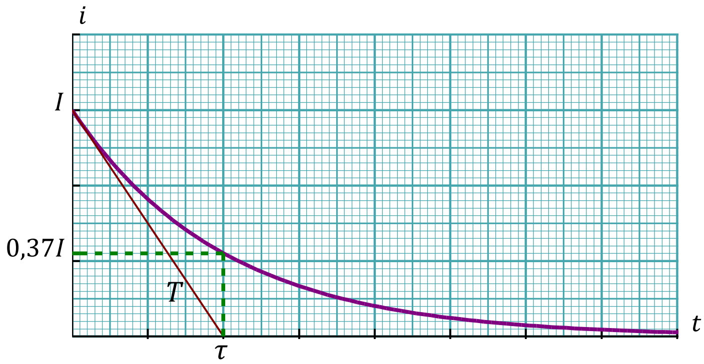
إن هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل: $i = Ae^{-\alpha\,t}$ (7)

باشتقاق العبارة (7) بالنسبة للزمن نجد: $\frac{di}{dt} = -A\alpha\,e^{-\alpha\,t}$ ، وبالتعويض في العلاقة (6) : $-A\alpha\,e^{-\alpha\,t} + \frac{1}{RC}Ae^{-\alpha\,t} = 0$

$Ae^{-\alpha\,t}\left(\frac{1}{RC} - \alpha\right) = 0$ ، وهذه المساواة تتحقّق من أجل $\frac{1}{RC} - \alpha = 0$ ، وبالتالي $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{RC}}$

ونحدّد الثابت A بالشروط الابتدائية، حيث عند $t = 0$ يكون $i = I = \frac{E}{R}$ ، لأن حينها يكون $u_C = 0$ ، وبالتالي $\frac{E}{R} = A \times 1$

أي $\boldsymbol{A = \frac{E}{R}}$ ، وعليه: $\boldsymbol{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$



التمثيل البياني $i = f(t)$:

لدينا $\boldsymbol{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$

عند $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{i = \frac{E}{R}}$

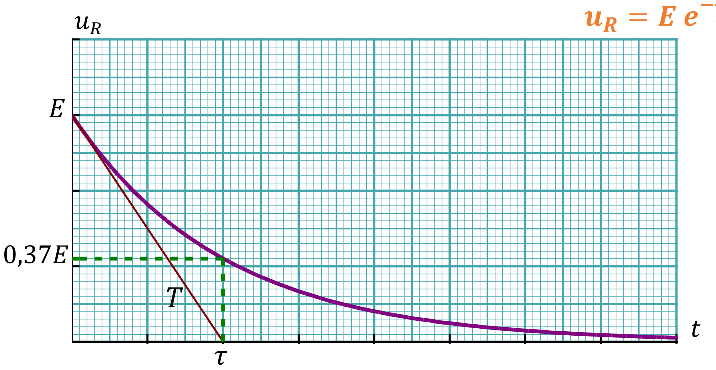
عند $\boldsymbol{t = \tau}$: $\boldsymbol{i = \frac{E}{R}\,\left(\frac{1}{e}\right) = 0{,}37\,I}$

عندما $\boldsymbol{t \to \infty}$: $\boldsymbol{i \to 0}$

$\boldsymbol{T}$ هو المماس للبيان عند $\boldsymbol{t = 0}$.

2 - 4 - تطور التوتّربين طرفي الناقل الأومي $\boldsymbol{u_{BC} = u_R}$:

لدينا $u_R = R\,i$ ، وبالتالي $u_R = R\,\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، $\boldsymbol{u_R = E\,e^{-\frac{1}{RC}t}}$



التمثيل البياني $u_R = f(t)$:

لدينا $u_R = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$

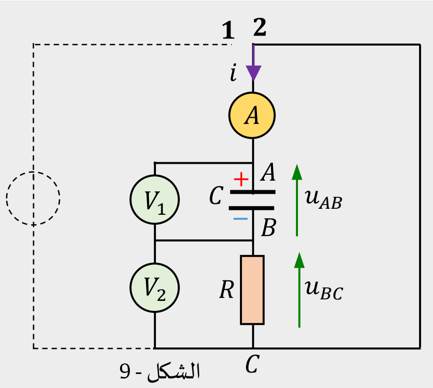
عند $\boldsymbol{t = 0}$: $u_R = E$

عند $\boldsymbol{t = \tau}$: $u_R = E\,\left(\frac{1}{e}\right) = 0{,}37\,E$

عندما $\boldsymbol{t} \to \infty$: $u_R \to 0$

T هو المماس للبيان عند $t = 0$.

3 - أثناء تفريغ المكثّفة:



الشكل - 9

لما تكون المكثّفة مشحونة تماما نضع البادلة عند $t = 0$ على الوضع (2)، الشكل - 9.

مقياس الأمبير A : تنحرف إبرته إلى قيمة عظمى سالبة بدءا من الصفر، ثم تعود تدريجيا إلى الصفر. نسمي هذا التيار تيار التفريغ.

مقياس الفولط V_1 : تنحرف إبرته تدريجيا من القيمة E إلى الصفر.

مقياس الفولط V_2 : تنحرف إبرته إلى قيمة عظمى سالبة بدءا من الصفر، ثم تعود تدريجيا إلى الصفر. نسجّل إثر ذلك نظامين:

النظام الانتقالي: يحدث التغيّر في قيم المقادير

النظام الدائم: تثبت قيم المقادير

خلال التفريغ تنتقل الالكترونات من اللبوس B إلى اللبوس A ، إلى أن يصبح اللبوسان في توازن إلكتروني، وحينها تصبح المكثّفة فارغة.

3 - 1 - تطوّر التوتر بين لبوسي المكثّفة $(u_{AB} = u_C)$:

حسب قانون جمع التوترات: $u_{AB} + u_{BC} = 0$ ، أي $u_C + u_R = 0$ (10)

ولدينا $q_A = q = C\,u_C$ ، ولدينا $i = C\dfrac{du_C}{dt}$.

في العلاقة (10) يصبح : $u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = 0$ ، لأن $u_R = Ri$ و $i = \dfrac{dq}{dt}$.

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية التي تميّز التوتر بين طرفي المكثّفة u_C هي $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = 0$ (11)

إن شكل حل المعادلة التفاضلية (11) هو: $u_C = Ae^{-\alpha t}$ (12)

A ، α عبارة عن ثابتين غير معدومين، وهما ثابتان يتعلّقان بمميّزات عناصر الدارة.

تحديد الثابتين α ، A :

نشتق بالنسبة للزمن العبارة (12) : $\dfrac{du_C}{dt} = -A\alpha\, e^{-\alpha t}$ ، ثم نعوّض في المعادلة التفاضلية (11)

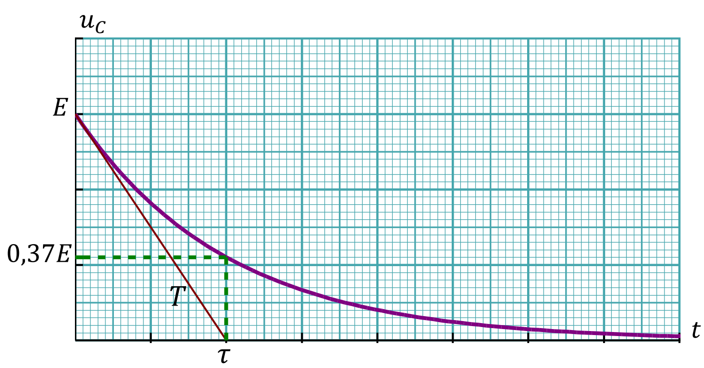
$$-A\alpha\, e^{-\alpha t} + \frac{1}{RC}Ae^{-\alpha t} = 0$$

$A\, e^{-\alpha t}\left(\dfrac{1}{RC} - \alpha\right) = 0$ ، ولكي تكون هذه المساواة محقّقة مهما كان الزمن، يجب أن يكون $\dfrac{1}{RC} - \alpha = 0$ ، وبالتالي $\alpha = \dfrac{1}{RC}$

نعيّن الثابت A بواسطة الشروط الابتدائية، أي نعتبر دائما عند اللحظة $t = 0$ المكثّفة مشحونة تماما، وبالتالي $u_{AB} = u_C = E$ ،

وبالتعويض في العلاقة (12) : $E = Ae^{-\alpha \times 0}$ ، أي $A = E$

تصبح عبارة التوتر بين طرفي المكثّفة: $u_C = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$ ، حيث ثابت الزمن هو الثابت $\tau = RC$.



التمثيل البياني $u_C = f(t)$:

لدينا $u_C = Ee^{-\frac{1}{\tau}t}$

عند $\boldsymbol{t = 0}$: $u_C = E$

عند $\boldsymbol{t = \tau}$: $u_C = E\left(\frac{1}{e}\right) = 0{,}37\,E$

عندما $\boldsymbol{t} \to \infty$: $u_C \to 0$

T هو المماس للبيان عند $t = 0$.

3 - 2 - تطور شحنة المكثّفة $q_A = q$:

لدينا $q = C\,u_C = CEe^{-\frac{1}{RC}t}$

يمكن الحصول على العبارة الزمنية لشحنة المكثّفة باتباع نفس الطريقة التي وجدنا بها العبارة الزمنية للتوتر بين لبوسيها.

قانون جمع التوترات: $u_{AB} + u_{BC} = 0$ ، أي $u_C + u_R = 0$

$\frac{q}{C}+R\,i=0$ ، $\frac{q}{C}+R\,\frac{dq}{dt}=0$ ، وبتقسيم الطرفين على R : $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=0$ (13)

إن شكل حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $q=Ae^{-\alpha\,t}$ (14)

مع العلم أن q هي شحنة اللبوس A ، أما α ، A هما ثابتان يتعلّقان بمميّزات عناصر الدارة الكهربائية. نشتق بالنسبة للزمن العبارة (14):

$\frac{dq}{dt}=-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}$ ، ثم نعوّض في المعادلة التفاضلية (13):

$$-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}+\frac{1}{RC}Ae^{-\alpha\,t}=0$$

$A\,e^{-\alpha\,t}\left(\frac{1}{RC}-\alpha\right)=0$ ، ولكي تكون هذه المساواة صحيحة مهما كان الزمن، يجب أن يكون $\frac{1}{RC}-\alpha=0$ ، وبالتالي $\alpha=\frac{1}{RC}$

نعيّن الثابت A بالشروط الابتدائية، أي عند $t=0$ تكون $q=CE$ ، وبالتعويض في العلاقة:(14)

$CE=Ae^{-\alpha\times 0}$ ، أي $\boldsymbol{A=CE}$ ، تصبح عبارة

شحنة المكثّفة: $q=CEe^{-\frac{1}{RC}t}$

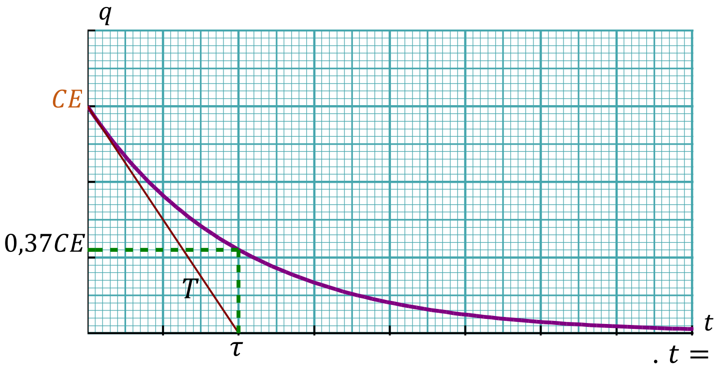
التمثيل البياني $\boldsymbol{q=f(t)}$:

لدينا $q=CEe^{-\frac{1}{RC}t}$

عند $\boldsymbol{t=0}$: $q=CE$

عند $\boldsymbol{t=\tau}$: $q=CE\left(\frac{1}{e}\right)=0{,}37\,CE$

عندما $q\to 0:\boldsymbol{t}\to\infty$



T هو المماس للبيان عند $t=0$.

3 - 3 - تطور شدّة التيار $\boldsymbol{i}$:

لدينا $i=C\,\frac{du_C}{dt}$ ، وبالتالي $i=C\times\left(-\frac{E}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، $i=-\frac{E}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$ (أو نجد العبارة مباشرة من $i=\frac{dq}{dt}$)

يمكن الحصول على العبارة الزمنية لشدّة التيار باتباع نفس الطريقة التي وجدنا بها العبارة الزمنية للتوتر بين لبوسي المكثّفة.

قانون جمع التوترات: $u_{AB}+u_{BC}=0$ ، أي $u_C+u_R=0$ ، وباشتقاق هذه العبارة الأخيرة بالنسبة للزمن نكتب:

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{du_R}{dt}=0$$

$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}+R\,\frac{di}{dt}=0$ ، ولدينا $\frac{dq}{dt}=i$ ، وبالتالي $\boldsymbol{\frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}\,i=0}$ (15)

إن هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل: $i=Ae^{-\alpha\,t}$ (16)

باشتقاق العبارة (16) بالنسبة للزمن نجد: $\frac{di}{dt}=-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}$ ، وبالتعويض في العلاقة (15): $-A\alpha\,e^{-\alpha\,t}+\frac{1}{RC}Ae^{-\alpha\,t}=0$

$Ae^{-\alpha\,t}\left(\frac{1}{RC}-\alpha\right)=0$ ، وهذه المساواة تتحقّق من أجل $\frac{1}{RC}-\alpha=0$ ، وبالتالي $\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{RC}}$.

نحدّد الثابت A بالشروط الابتدائية، حيث عند $t=0$ يكون $i=I=-\frac{E}{R}$ ، لأن حينها يكون $u_C=0$ ، وبالتالي $-\frac{E}{R}=A\times 1$

أي $\boldsymbol{A=-\frac{E}{R}}$ ، وعليه : $\boldsymbol{i=-\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$

التمثيل البياني $\boldsymbol{i=f(t)}$:

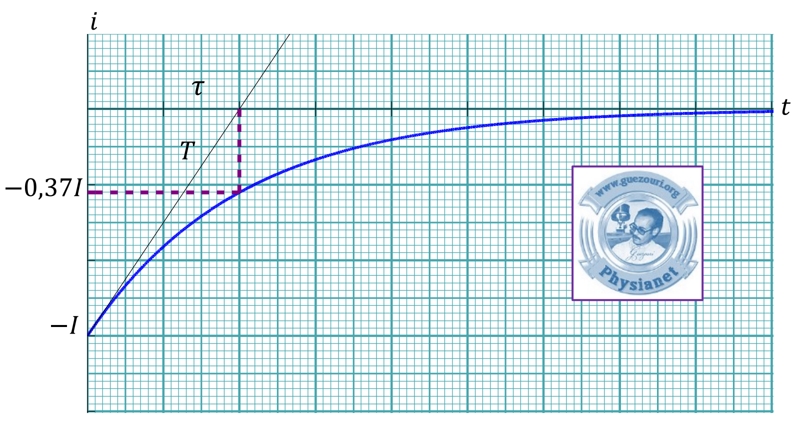
لدينا $i=-\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

عند $\boldsymbol{t=0}$: $i=-\frac{E}{R}$

عند $\boldsymbol{t=\tau}$: $i=-\frac{E}{R}\left(\frac{1}{e}\right)=-0{,}37\,CE$

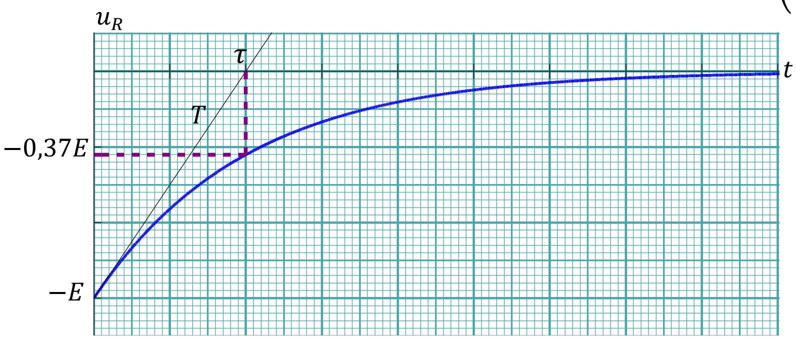
عندما $i\to 0:\boldsymbol{t}\to\infty$

T هو المماس للبيان عند $t=0$.



3 - 4 - تطوّر التوتّرين طرفي الناقل الأومي $u_{BC} = u_R$:

لدينا $u_{BC} = u_R = R\,i$ ، وبالتالي $u_R = R\left(-\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ ، $u_R = -E\,e^{-\frac{1}{RC}t}$.



التمثيل البياني $u_R = f(t)$:

لدينا $u_R = -Ee^{-\frac{1}{RC}t}$

عند $t = 0$: $u_{BC} = -E$

عند $t = \tau$: $u_R = -E\left(\frac{1}{e}\right) = -0{,}37\,CE$

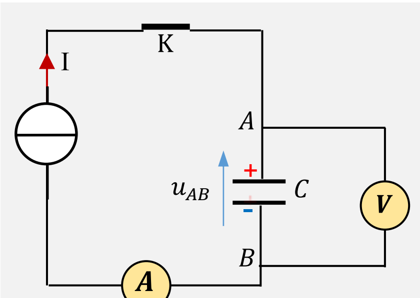
عندما $t \to \infty$: $u_R \to 0$

T هو المماس للبيان عند $t = 0$.

ملاحظة:

ثابت الزمن يعبّر عن الدارة RC ، وليس عن مقدار من المقادير التي نتابع تطوّرها، حيث سواء في الشحن أو التفريغ دائما $\tau = RC$.

4 - دراسة التوترين طرفي المكثفة باستعمال مولد للتيار:



الشكل - 10

ندرس مثالا تجريبيا بحيث نستعمل مولدا للتيار وليس مولدا للتوتّر (الشكل - 10).

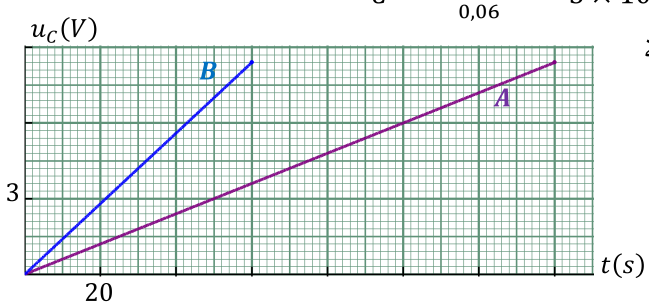
نضبط شدة تيار المولد على القيمة $I = 0{,}30\ mA$ ، ثم نغلق القاطعة فيشير مقياس الأمبير إلى هذه القيمة وتبقى ثابتة طيلة عملية الشحن. أما إبرة مقياس الفولط تشرع في الانحراف تدريجيا.

نسجّل قيم التوتر بين طرفي المكثفة عند مختلف اللحظات.

مثّلنا التوتر بدلالة الزمن $u_{AB} = u_C = f(t)$. (البيان A)

لدينا $u_C = \frac{q}{C} = \frac{I}{C}t$ ، وهو مستقيم معادلته من الشكل $u_C = a\,t$

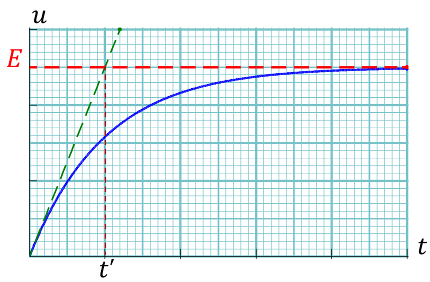
بمطابقة العلاقتين: $\frac{I}{C} = a = \frac{8{,}4}{140} = 0{,}06\ V.s^{-1}$ ، وبالتالي $C = \frac{0{,}3\times10^{-3}}{0{,}06} = 5\times10^{-3}\ F$



نفرّغ المكثفة ونعيد شحنها، لكن هذه المرة نضبط شدّة تيار المولد على القيمة $I' = 0{,}70\ mA$. نتحصل على البيان B . الفرق يكمن فقط في أن المكثّفة تُشحن في وقت أقصر إذا كانت شدّة التيّار أكبر.

5 - ملاحظات:

- نبيّن أن المماس للبيان عند $t = 0$ يقطع الخط المقارب الأفقي عند $t = \tau$ في كل البيانات من الشكل $y = K(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t})$



نأخذ مثلا التوتر بين طرفي لبوسي المكثّفة في حالة الشحن: $u = E(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t})$

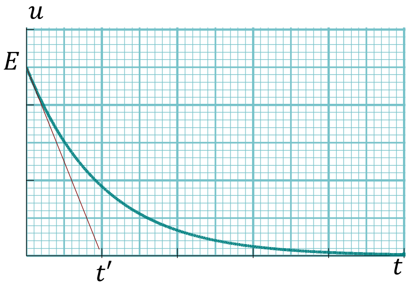
لدينا ميل المماس عند $t = 0$: $a = \frac{E}{t'}$

كذلك ميل المماس هو $a = \frac{du}{dt}/_{t=0}$ ، حيث $\frac{du}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}$

$a = \frac{du}{dt}/_{t=0} = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}\times0} = \frac{E}{\tau}$ ، وبالتالي $\frac{E}{\tau} = \frac{E}{t'}$ ، ومنه $t' = \tau$

- نبيّن أن المماس للبيان عند $t = 0$ يقطع محور الزمن عند $t = \tau$ في كل البيانات من الشكل $y = Ke^{-\frac{1}{\tau}t}$

نأخذ مثلا التوتر بين طرفي الناقل الأومي حالة الشحن: $u = E\,e^{-\frac{1}{\tau}t}$



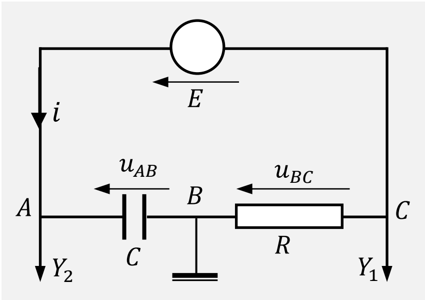
لدينا ميل المماس عند $t = 0$: $a = -\frac{E}{t'}$

كذلك ميل المماس هو $a = \frac{du}{dt}/_{t=0}$ ، حيث $\frac{du}{dt} = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}$

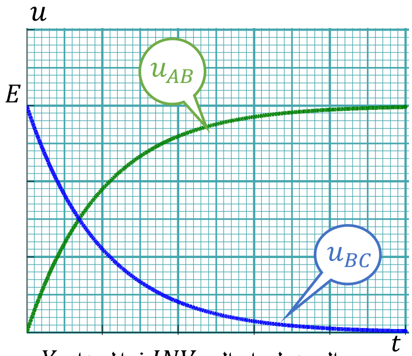
$a = \frac{du}{dt}/_{t=0} = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = -\frac{E}{\tau}$ ، وبالتالي $-\frac{E}{\tau} = -\frac{E}{t'}$ ، ومنه $t' = \tau$

6 - مثال لربط راسم الاهتزاز:

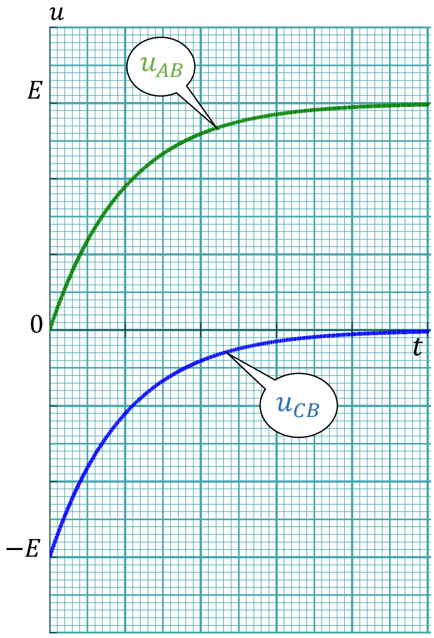
نركب الدارة المبيّنة في الشكل - 11، حيث استعملنا مولّدا مثاليا للتوتر. ربطنا الدارة لراسم اهتزاز ذي ذاكرة (يرسم النظامين الانتقالي والدائم). في المدخل Y_2 نشاهد التوتّر u_{AB} ، وفي المدخل Y_1 نشاهد التوتر u_{CB} .



الشكل - 11



بعد الضغط على الزر INV في المدخل Y_1



قبل الضغط على الزر INV في المدخل Y_1

Guezouri Abdelkader, ancien élève de l'école normale supérieure.
Site: www.guezouri.org
Chaine Youtube : www.guezouri.org → Physianet Guezouri
Tél: 07 73 34 31 76
FB : Abdelkader Guezouri … https://www.facebook.com/Aek.guezouri
Page FB: Guezouri_Physique
Blog FB: Akhbar El-lil