في هذا الدرس

1 - الحركة المستقيمة المنتظمة والحركة المستقيمة المتغيّرة بانتظام (دراسة حركيّة)

2 - تطبيقات لقوانين نيوتن على حركة مركز عطالة جسم خاضع لعدّة قوى:

* دراسة الحركة على مستو أفقي بواسطة مبدأ انحفاظ الطاقة والقانون الثاني لنيوتن
* دراسة الحركة على مستو مائل بواسطة مبدأ انحفاظ الطاقة والقانون الثاني لنيوتن
* دراسة الحركة في المنعطفات بواسطة مبدأ انحفاظ الطاقة

الحركات المستقيمة

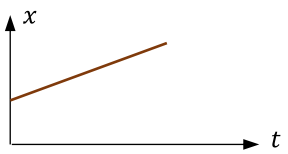
الحركات المستقيمة مسارها مستقيم، أي أنّ هذه الحركات تحدث وفق محور واحد، إما $\overrightarrow{Ox}$ أو $\overrightarrow{Oy}$ أو $\overrightarrow{Oz}$.

1 - الحركة المستقيمة المنتظمة:

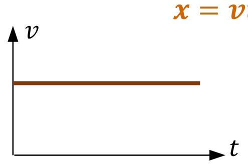
التسارع معدوم $\boldsymbol{a = 0}$ ، وبالتالي $\boldsymbol{v = C}$ (حيث C عبارة عن ثابت). أما الفاصلة فهي $x = vt + C'$ (1)

(حيث C' عبارة عن ثابت).

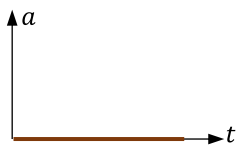
نسمي x_0 الفاصلة الابتدائية للمتحرك، وهي فاصلته عند اللحظة $t = 0$. نعوّض في العلاقة (1) : $x_0 = v \times 0 + C'$ ، ومنه $C' = x_0$ ، وبالتالي المعادلة الزمنية للفاصلة : $\boldsymbol{x = vt + x_0}$



حسب إشارتي v و x_0



حسب إشارة v



من أجل حساب المسافة d التي يقطعها المتحرك خلال المدة الزمنية t ، نكتب $\boldsymbol{d = v\,t}$.

مثال: اكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لمتحرك حركته مستقيمة منتظمة، حيث يشغل الفاصلة $x_1 = 3\,m$ عند اللحظة $t_1 = 2\,s$ ، ويشغل الفاصلة $x_2 = -5\,m$ عند اللحظة $t_2 = 3\,s$ ، ثمّ مثّل $x(t)$ ، $v(t)$ ، $a(t)$.

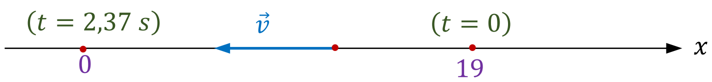
الحل: المعادلة الزمنية هي $x = vt + x_0$. يجب أن نحسب قيمتي السرعة v والفاصلة الابتدائية x_0 .

المطلوب منّا رياضيا هو معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $(2\,s\,, 3\,m)$ و $(3\,s\,, -5\,m)$.

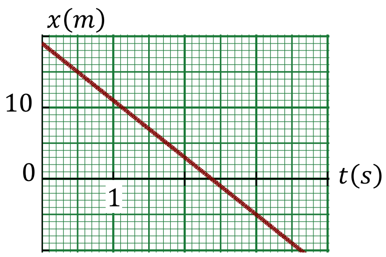
$$3 = 2v + x_0$$
$$-5 = 3v + x_0$$

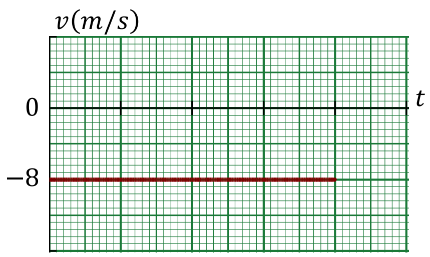
بحل هذه الجملة نجد $v = -8\,m/s$ و $x_0 = 19\,m$ ، وبالتالي تكون المعادلة الزمنية $\boldsymbol{x = -8t + 19}$

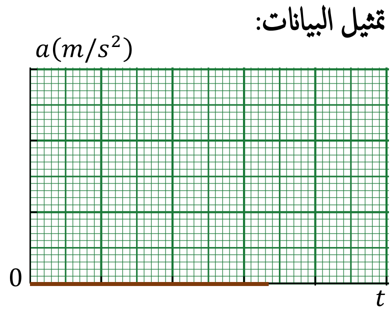
ملاحظة: $v = -8\,m/s$ معناها المتحرك يتحرك في الجهة السالبة للمحور الموجه.



تمثيل البيانات:







2- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:

في الحركة المستقيمة المتغيّرة بانتظام يكون التسارع ثابتا $a = C$ ، وبالتالي $v = at + C'$. نسمّي v_0 السرعة الابتدائية، أي السرعة عند اللحظة $t = 0$.

وبالتالي $v_0 = a \times 0 + C'$ ، ومنه $C' = v_0$ ، وتكون المعادلة الزمنية للسرعة: $\boldsymbol{v = at + v_0}$ (1)

لدينا $v = \frac{dx}{dt}$ ، وبالتالي $x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + C''$ ، ولكي نحدّد C'' نكتب $x_0 = \frac{1}{2}a \times 0 + v_0 \times 0 + C''$ ، ومنه $C'' = x_0$

وتكون المعادلة الزمنية للفاصلة: $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0}$ (2)

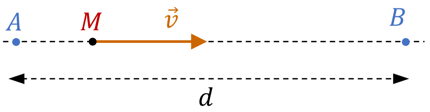
لو استخرجنا الزمن من العلاقة (1) وعوّضناها في العلاقة (2) نجد عبارة مستقلّة عن الزمن هي $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

حيث x هي فاصلة المتحرّك عندما كانت سرعته v ، و x_0 هي فاصلته لعندما كانت سرعته v_0 .

لدينا المسافة المقطوعة هي $d = x - x_0$ ، وبالتالي $\boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2a\,d}$

بصفة عامّة: يمر المتحرّك M بالنقطة A بسرعة طويلتها v_A ، بحيث تصبح سرعته v_B في النقطة B ، ويقطع المسافة $d = AB$ مستغرقا فيها المدة الزمنية t ، فإنّ:

$$\boldsymbol{d = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_A t}$$
$$\boldsymbol{v_B - v_A = a\,t}$$
$$\boldsymbol{v_B^2 - v_A^2 = 2a\,d}$$



البرهان على العلاقة $v_B^2 - v_A^2 = 2a\,d$:

من العلاقة $v = at + v_0$ نستخرج الزمن: $t = \frac{v - v_0}{a}$ ، ونعوّض عبارة الزمن في العلاقة $x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0$

$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0$ ، ثمّ $x - x_0 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$

نستخرج العامل المشترك $\frac{v - v_0}{a}$:

$$x - x_0 = \left(\frac{v - v_0}{a}\right)\left[\frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + v_0\right]$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v - v_0}{a}\right)\left(\frac{v + v_0}{2}\right) = \frac{1}{2}a(v - v_0)(v + v_0) = \frac{1}{2}a(v^2 - v_0^2)$$

ولدينا $x - x_0 = d$ ، وبالتالي $\boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2ad}$

طبيعة الحركة:

لكي نعرف إن كانت الحركة المستقيمة المتغيّرة بانتظام متسارعة أم متباطئة، نحدّد إشارة الجداء $\vec{v} \times \vec{a}$.

$\vec{v} \times \vec{a} > 0 \Leftarrow$ متسارعة

$\vec{v} \times \vec{a} < 0 \Leftarrow$ متباطئة

مثال: نقذف عند اللحظة $t = 0$ شاقوليا نحو الأعلى جسما صغيرا من النقطة A بسرعة $v_A = 6\,m/s$ ، وننسب حركته للمحور $x'x$ الموجّه نحو الأعلى ومبدؤه النقطة (A) . نهمل تأثير الهواء على الجسم، وبذلك يكون تسارع الجسم $a = -g = -10\,m/s^2$ ، وذلك باعتبار شدّة شعاع المجال الأرضي في مكان التجربة $g = 10\,m/s^2$.

المعادلة الزمنية للسرعة هي: $v = -10\,t + 6$

يمكن كتابة شعاع السرعة بالشكل : $\vec{v} = (-10t + 6)\,\vec{\imath}$ وشعاع التسارع : $\vec{a} = -10\,\vec{\imath}$

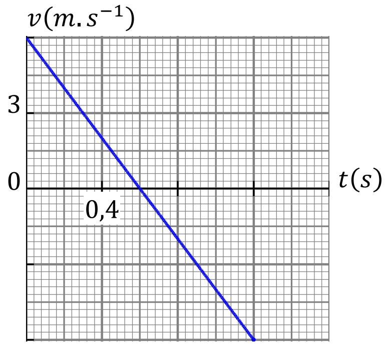
ويكون $\vec{a} \times \vec{v} = -10\,(-10t + 6)\vec{\imath}^{\,2} = -10\,(-10t + 6)$

تنعدم سرعة الجسم عند اللحظة $t = \frac{0 - 6}{-10} = 0{,}6\,s$

المعادلة الزمنية للفاصلة هي $x = -5\,t^2 + 6t$ ، وتنعدم هذه الفاصلة من أجل $-5\,t^2 + 6t = 0$ ، أيْ $t = 0$ و $t = 1{,}2\,s$

نعوض في المعادلة الزمنية للسرعة $t = 1{,}2\,s$ ، ونجد $v = -6\,m/s$

وبالتالي عندما ينزل الجسم يبلغ السرعة $v = -6\,m/s$ عند النقطة التي قُذف منها.



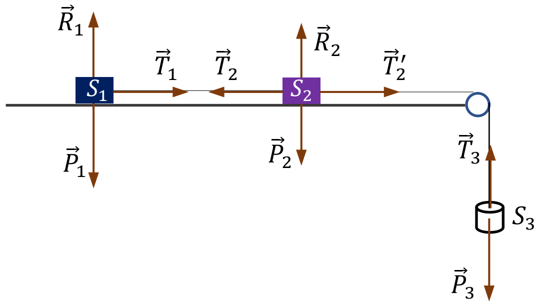
في المجال الزمني $[0\ ;\ 0{,}6\ s]$: قيم السرعة كلها موجبة والتسارع سالب، وبالتالي تكون الحركة متباطئة، لأنّ $\vec{a} \times \vec{v} < 0$

في المجال الزمني $[0{,}6\ s\ ;\ 1{,}2\ s]$: قيم السرعة كلها سالبة والتسارع سالب، وبالتالي تكون الحركة متسارعة لأنّ $\vec{a} \times \vec{v} > 0$

3ـ القوى الداخلية والقوى الخارجية:

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية هي القوى التي يؤثّر بها جزء من الجملة على جزء آخر من الجملة. تنعدم هذه القوى مثنى مثنى، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة. القوى الخارجية هي القوى التي يؤثّر بها الوسط الخارجي على الجملة.

نحدّد القوى الداخلية والقوى الخارجية بتحديد الجملة التي ندرسها.



لدينا جملة مكوّنة من ثلاثة أجسام S_1 ، S_2 ، S_3 ، حيث نهمل كتلة البكرة.

- الجملة $(S_1\ ,S_2\ ,S_3)$:

القوى الخارجية: $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$ ، $\vec{P}_3$ ، $\vec{R}_1$ ، $\vec{R}_2$

القوى الداخلية: $\vec{T}_1$ ، $\vec{T}_2$ ، $\vec{T}'_2$ ، $\vec{T}_3$

- الجملة $(\ S_2\ )$:

القوى الخارجية: $\vec{P}_2$ ، $\vec{R}_2$ ، $\vec{T}_2$ ، $\vec{T}'_2$

القوى الداخلية: لا توجد

- الجملة $(\ S_2\ ,S_3)$:

القوى الخارجية: $\vec{P}_3$ ، $\vec{P}_2$ ، $\vec{R}_2$ ، $\vec{T}_2$

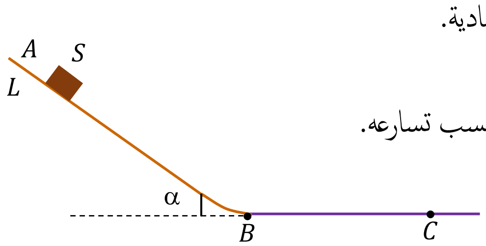
القوى الداخلية: $\vec{T}'_2$ ، $\vec{T}_3$

> عند دراسة حركة جملة، يجب أن:
> - نحدّد هذه الجملة
> - نقوم بإحصاء كل القوى الخارجية المؤثّرة عليها
> - نحدّد مرجع الدراسة، حيث يجب أن يكون غاليليًا
> - نختار معلما مناسبا نزوّد به المرجع
>
> فإذا طبقنا القانون الثاني لنيوتن، نكتب: $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$

مثال تطبيقي 01 :

نعتبر الاحتكاك على المستوي المائل (L) مكافئا لقوة ثابتة شدتها $f = 0{,}1\ N$ ، ولها حامل شعاع السرعة ومعاكسة له.

نترك جسما صلبا S كتلته $m = 100\ g$ ينزل من النقطة A عند اللحظة $t = 0$ على خط الميل الأعظم لمستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$. نهمل تأثير الهواء ونعتبر AB خطا مستقيما، ونعتبر الجسم S نقطة مادية.



1 - مثّل كل القوى المؤثرة على الجسم بين A و B .

2 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بيّن أن حركة S بين A و B متسارعة بانتظام، ثم احسب تسارعه.

3 - احسب تسارع S بين A و B بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة.

4 - احسب شدّة قوة تأثير المستوي المائل على الجسم.

5 - نعتبر المستوي الأفقي BC أملس جدّا.

5 - 1 - مثّل القوى المؤثرة على S بين B و C .

5 - 2 - احسب سرعة S عند النقطة C علما أن المسافة $AB = 70\ cm$.

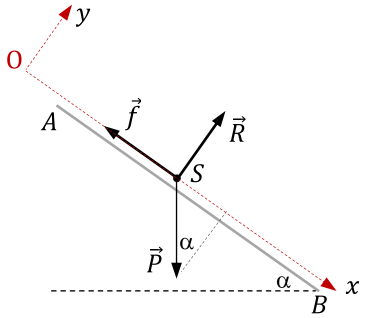
5 - 3 - احسب شدّة قوة تأثير المستوي الأفقي على الجسم.

6 - باعتبار قوة الاحتكاك على BC ثابتة شدتها $f' = 0{,}15\ N$ ومعاكسة لشعاع السرعة، نعيد ترك الجسم S في النقطة A .

كم يجب أن تكون المسافة BC لكي يتوقف الجسم في النقطة C ؟ $\qquad g = 10\ m/s^2$

الحل:

1 - القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S) بين A و B : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ، قوة تأثير المستوي المائل $\vec{R}$.



2 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا.

نسمي هذا القانون كذلك نظرية مركز العطالة، أو المبدأ الأساسي للتحريك (RFD) .

(اعتبرنا الجسم نقطة مادية، أي ليس له أبعاد، لكن هذه النقطة لها كتلة هي كتلة الجسم S).

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

نسقط العلاقة الشعاعية (1) على هذا المحور $\overrightarrow{Ox}$ لخط الميل الأعظم للمستوي المائل:

مسقط $\vec{P}$: $P\,\sin\alpha$ (المسقط موجب لأنه في جهة المحور $\overrightarrow{Ox}$).

مسقط $\vec{R}$: معدوم لأن هذه القوة عمودية على $\overrightarrow{Ox}$.

مسقط $\vec{f}$: $-f$ (سالب لأن هذه القوة معاكسة مباشرة للمحور $\overrightarrow{Ox}$).

a : هي القيمة الجبرية للتسارع، يمكن أن تكون موجبة ويمكن أن تكون سالبة.

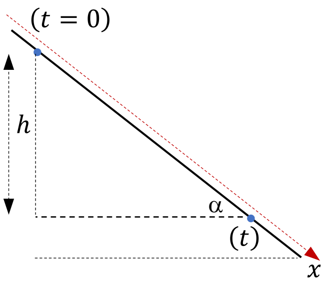
لستَ مطالبا بكل هذه التفاصيل في الامتحانات، بل اكتب العلاقة الشعاعية وقم بالإسقاط، أما أنا مطالبٌ بهذه التفاصيل، لأنني أستاذ ثرثار لا يحب الاختصار.

وبالتالي نكتب: $P\,\sin\alpha - f = m\,a$ ، ومنه $a = \dfrac{P\,\sin\alpha - f}{m} = g\,\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$

نلاحظ أن المقادير: m ، α ، f ، g كلها تبقى ثابتة أثناء الحركة، إذن التسارع ثابت، وبالتالي حركة الجسم S متغيّرة بانتظام.

$$a = 10 \times 0{,}5 - \frac{0{,}1}{0{,}1} = 4\ m/s^2$$

3 - بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة:



نعتبر عند اللحظة t أن فاصلة المتحرّك هي x . سرعة الجسم عند اللحظة t هي v.

مبدأ انحفاظ الطاقة للجملة (الجسم) : $E_{c1} + W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f}) = E_{c2}$

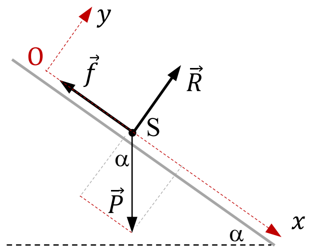
لدينا $E_{c1} = 0$ ، $W(\vec{R}) = 0$ ، $W(\vec{P}) = mgh$ ، $W(\vec{f}) = -f\,x$

ولدينا $h = x\,\sin\alpha$. وبالتالي $mg\,x\,\sin\alpha - f\,x = \frac{1}{2}mv^2$

نشتق العلاقة بالنسبة للزمن: $mg\,\sin\alpha\,v - f\,v = mv\,a$

$mg\,\sin\alpha - f = m\,a$ ، ومنه $a = g\,\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$

4 - شدّة قوة تأثير المستوي المائل:

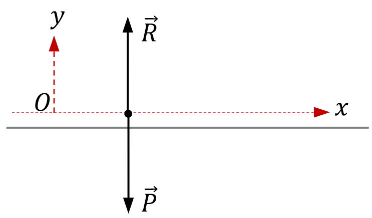


نسقط العلاقة الشعاعية (1) على المحور $\overrightarrow{Oy}$: $R - P\,\cos\alpha = 0$

شعاع التسارع محمول على المحور $\overrightarrow{Ox}$ ، لهذا مسقطه على $\overrightarrow{Oy}$ يساوي الصفر.

$$R = P\,\cos\alpha = 0{,}1 \times 10 \times 0{,}866 = 0{,}87\ N$$

5 -



5 - 1 - تمثيل القوى على المستوي الأفقي: (الشكل)

5 - 2 - لكي نحسب سرعة الجسم يجب أولا أن نعرف طبيعة الحركة.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}' \qquad (2)$

وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور $\overrightarrow{Ox}$: $0 + 0 = m\,a'$ ، ومنه $a' = 0$

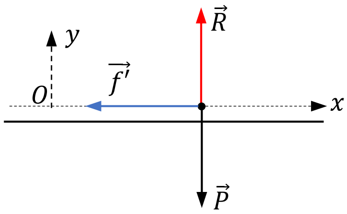
سرعة الجسم غير معدومة وتسارعه معدوم، إذن فهو في حركة، وحركته هذه تكون منتظمة.

ما دامت الحركة منتظمة ابتداء من النقطة B ، فإن سرعة الجسم في النقطة C هي نفسها السرعة في النقطة B .

حساب السرعة في النقطة B :

$v_B^2 - v_A^2 = 2\,a \times AB$ ، ولدينا $v_A = 0$ ، وبالتالي: $v_B = \sqrt{2\,a \times AB} = \sqrt{2 \times 4 \times 0{,}7} = 2{,}37 m/s = v_C$.

5 - 3 - بإسقاط العلاقة الشعاعية (2) على المحور $\overrightarrow{Oy}$: $R - P = 0$ ، ومنه $R = mg = 0{,}1 \times 10 = 1N$



6 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم S :

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f'} = m\,\vec{a''}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور $\overrightarrow{Ox}$: $-f' = m\,a''$

وبالتالي $a'' = -\frac{f'}{m}$

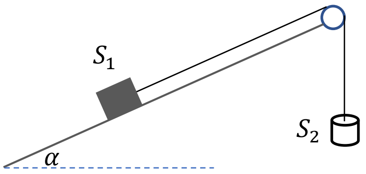
التسارع ثابت إذن الحركة متغيّرة بانتظام. (السرعة موجبة، لأنّ الحركة في جهة المحور $\overrightarrow{Ox}$.

لكي نحسب المسافة BC نطبق العلاقة $v_C^2 - v_B^2 = 2\,a'' \times BC$ (3)

ولدينا $v_B = 2{,}37\ m/s$ و $v_C = 0$ (توقّف الجسم)، وبالتالي $a'' = -\frac{0{,}15}{0{,}1} = -1{,}5\ m/s^2$

وبالتعويض في العلاقة (3) : $BC = \frac{-v_B^2}{2\,a''} = \frac{5{,}62}{3} = 1{,}87\ m$

مثال تطبيقي 02 :



لدينا في الجملة الميكانيكية المقابلة:

- مستوي مائل بزاوية $\alpha = 40$
- جسمان S_1 و S_2 نعتبرهما نقطيان كتلتاهما على الترتيب $m_1 = 200\ g$ و $m_2 = 80\ g$
- بكرة كتلتها مهملة وقابلة للدوران حول محورها الأفقي، وخيط مهمل الكتلة يمر على محزها

نعتبر قوى الاحتكاك على المستوي المائل قوّة واحدة $\vec{f}$ معاكسة لشعاع السرعة وشدّتها ثابتة. يتحرك الجسم S_1 على خط الميل الأعظم للمستوي المائل.

نترك الجملة لحالها عند اللحظة $t = 0$ بدون سرعة ابتدائية فتتحرّك، ويقطع الجسم S_1 مسافة قدرها $d = 0{,}5\ m$ خلال مدّة قدرها $1s$.

1 - بيّن أن الجسم S_2 يتحرّك نحو الأعلى.

2 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع سطحي أرضي جد عبارة تسارع الجسم S_1 و S_2 .

3 - احسب شدّة قوّة الاحتكاك وشدّة التوتر في الخيط.

4 - احسب سرعة كل جسم عند حلول اللحظة $t = 1{,}5\ s$.

5 - ينقطع الخيط عند اللحظة $t = 1{,}5\ s$ بدون أن يتغير مسارا الجسمين.

5 - 1 - صف حركة كل جسم بعد انقطاع الخيط بدون اجراء أيّ حساب.

5 - 2 - احسب المسافة التي يقطعها الجسم S_2 منذ انقطاع الخيط إلى أن تنعدم سرعته.

5 - 3 - مثّل بيانيا بدلالة الزمن سرعة الجسم S_1 في المجال الزمني $[0\ ,\ 2\ s]$.

$g = 10\ m/s^2$

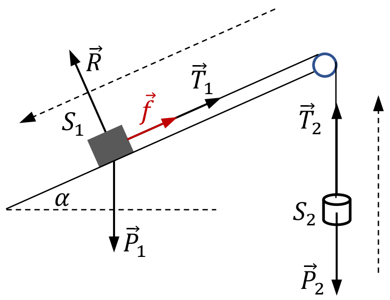
الحل:

1 - جهة الحركة:

نقارن بين P_2 و $P_1 \sin\alpha$ ، حيث $P_2 = m_2 g = 0{,}08 \times 10 = 0{,}8\ N$ و $P_1 \sin\alpha = 0{,}2 \times 10 \times \sin 40 \approx 1{,}3\ N$

بما أن $P_1 \sin\alpha > P_2$ ، فإن الجسم S_2 يتحرّك نحو الأعلى.

2 -



نقسّم الجملة إلى جزأين هما S_1 و S_2 .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا.

الجسم S_1 : $\vec{P_1} + \vec{R_1} + \vec{T_1} + \vec{f} = m_1\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموازي لخط الميل الأعظم للمستوي المائل: $P_1\,sin\alpha - T_1 - f = m_1 a$ (1)

الجسم S_2 : $\vec{P_2} + \vec{T_2} = m_2\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي الموجّه نحو الأعلى : $T_2 - P_2 = m_2 a$ (2)

لدينا $T_1 = T_2$ ، لأنّ كتلة البكرة مهملة. طويلتا تسارع الجسمين متساويتان.

نجمع طرفي العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف، ونجد $P_1\,sin\alpha - P_2 - f = (m_1 + m_2)a$ ، ومنه $a = \frac{P_1\,sin\alpha - P_2 - f}{m_1 + m_2}$ (3)

3 - لكي نحسب شدّة قوّة الاحتكاك، نحسب أولا تسارع الجسمين. لدينا حسب العبارة (3) أن التسارع ثابت، وبالتالي الحركة مستقيمة متغيّرة بانتظام، وفي هذه الحركة المسافة المقطوعة هي $d = \frac{1}{2}\,at^2$ ، ومنه $a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2\times 0{,}5}{1} = 1\,m/s^2$

نعوض في العلاقة (3): $1 = \frac{1{,}3 - 0{,}8 - f}{0{,}28}$ ، ومنه $f = 0{,}22\,N$

نحسب توتر الخيط من العلاقة (2) مثلا: $T_2 = 0{,}8 + 0{,}08\times 1 = 0{,}88\,N$

4 - سرعة كل جسم: $v = at = 1\times 1{,}5 = 1{,}5\,m/s$

5 -

5 - 1 - نضع في العلاقة (1) : $T_1 = 0$ ، وبالتالي $a' = \frac{P_1\,sin\alpha - f}{m_1}$ ، وهذا التسارع ثابت، وبما أن $P_1\,sin\alpha\ > f$ ، فإن حركة الجسم S_1 تبقى متسارعة بانتظام.

نضع في العلاقة (2): $T_2 = 0$ ، وبالتالي $a'' = -\frac{P_2}{m_2} = -\frac{m_2 g}{m_2} = -g$ ، وهذا التسارع ثابت وسالب، وبالتالي حركة الجسم S_2 متباطئة بانتظام.

ملاحظة: السرعة موجبة، لأن الجسمين يتحرّكان في الجهة الموجبة لكل محور.

5 - 2 - المسافة h التي يقطعها الجسم S_2 : لدينا $v^2 - v'^2 = 2a''h$ ، حيث $v = 0$ و $v' = 1{,}5\,m/s$

وبالتالي $h = \frac{-(1{,}5)^2}{-2\times 10} = 0{,}11\,m$

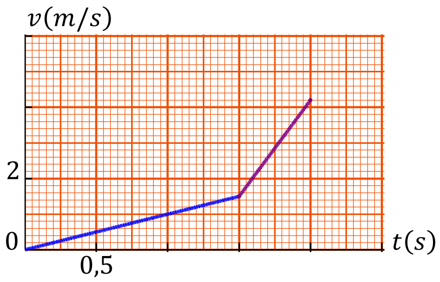
5 - 3 - لدينا $a' = \frac{1{,}3 - 0{,}22}{0{,}2} = 5{,}4\,m/s^2$

السرعة التي يبلغها الجسم S_1 خلال المدّة الزمنية $t = 2 - 1{,}5 = 0{,}5\,s$ هي $v = 5{,}4\times 0{,}5 + 1{,}5 = 4{,}2\,m/s$

التمثيل البياني:

مثلنا في المجال الزمني $[0 - 1{,}5\,s]$ التابع الزمني $v = t$

مثلنا في المجال الزمني $[1{,}5 - 2\,s]$ التابع الزمني $v = 5{,}4t + 1{,}5$



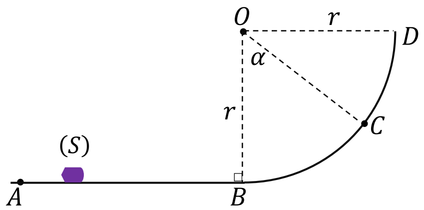
مثال تطبيقي 03 :

ندرس حركة جسم نعتبره نقطة مادية كتلته $m = 200\,g$ على سكة تتألّف من جزأين، حيث:

الجزء AB : مسار أفقي طوله $AB = 2\,m$

الجزء BD : جزء من دائرة نصف قطرها $r = 1\,m$ ، وينتمي للمستوى الشاقولي الذي يشمل AB .

ندفع الجسم من النقطة A بسرعة أفقية نحو النقطة B طويلتها $v_A = 2\,m/s$ ، فيمرّ بالنقطة B بسرعة طويلتها $v_B = 1\,m/s$ ، ويتوقف في النقطة C راجعا نحو B .



نهمل الاحتكاك على الجزء BD ، ونعتبر الاحتكاك على الجزء AB قوّة واحدة $\vec{f}$ معاكسة لشعاع السرعة وشدّتها ثابتة.

1 - مثّل القوى المؤثّرة على الجسم على المسار AB .

2 - بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة احسب شدّة القوة $\vec{f}$.

3 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم بين A و B في مرجع سطحي أرضي، بيّن أن حركته متباطئة بانتظام.

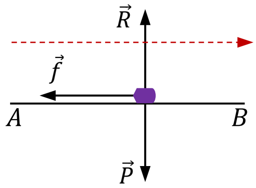
4 - تأكّد من شدّة قوّة الاحتكاك المحسوبة في السؤال 2 .

5 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على المسار الدائري، بيّن أنّ شدّة قوة تأثير الطريق على الجسم غير ثابتة.

6 - بيّن أن شدّة قوة تأثير الطريق على الجسم في النقطة C تُكتب بالشكل: $R = 6\,cos\alpha - 3{,}8$

7 - احسب شدة القوة $\vec{R}$ في النقطة C .

الحل:



1 - تمثيل القوى على المسار AB : (الشكل)

2 - بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (الجسم + الأرض):

$E_{cA} + E_{ppA} + W(\vec{f}) + W(\vec{R}) = E_{cB} + E_{ppB}$ ، ولدينا $E_{ppA} = E_{ppB}$ و $W(\vec{R}) = 0$

وبالتالي: $\frac{1}{2}mv_A^2 - f \times AB = \frac{1}{2}mv_B^2$ ، ومنه $f = \frac{m\,(v_A^2 - v_B^2)}{2\,AB} = \frac{0{,}2 \times (4-1)}{2 \times 2} = 0{,}15\ N$

3 - نطبق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم بين A و B في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا: $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$

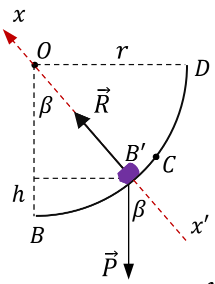
$\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ ، وبالإسقاط على المحور الأفقي الممثل في الشكل: $-f = m\,a$ ، ومنه $a = -\frac{f}{m}$ (1)

إنّ هذا التسارع ثابت وسالب، وبما أن شعاع السرعة موجّه في جهة المحور فإنّ $\vec{a} \times \vec{v} < 0$ ، وبالتالي الحركة متباطئة بانتظام.

4 - لدينا $v_B^2 - v_A^2 = 2a\ \times (AB)$ ، ومنه $a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\,(AB)} = \frac{1-4}{4} = -0{,}75\ m/s^2$

بالتعويض في العلاقة (1): $f = -(-0{,}75 \times 0{,}2) = 0{,}15\ N$

5 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في النقطة B' : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ ، وبالإسقاط على المحور xx' : $R - P\,cos\beta = m\,a_n$



ولدينا $a_n = \frac{v_{B'}^{2}}{r}$ ، وبالتالي $R = Pcos\alpha + m\,\frac{v_{B'}^{2}}{r}$ (2)

بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (الجسم) بين النقطتين B و B' ، نكتب:

$E_{cB} + W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = E_{cB'}$ ، ولدينا $W(\vec{R}) = 0$ ، لأن عند كل لحظة يكون $\vec{R}$ عموديًا على المماس للمسار.

$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = \frac{1}{2}mv_{B'}^2$ ، حيث $h = r(1 - cos\beta)$ ، وبالتالي $v_{B'}^2 = v_B^2 - 2gr(1 - cos\beta)$

بالتعويض في العلاقة (2): $R = mg\,cos\alpha + m\,\frac{v_B^2 - 2gr\,(1 - cos\beta)}{r} = mg\,cos\alpha + \frac{m\,v_B^2}{r} - 2mg(1 - cos\beta)$

$R = mg\,(3cos\beta - 2) + \frac{m\,v_B^2}{r}$ (3)

وبما أن شدّة $\vec{R}$ تتعلّق بالزاوية β ، فإنّ شدّة هذه القوّة غير ثابتة أثناء الحركة.

6 - نعوّض في العلاقة (3): $R = 0{,}2 \times 10\,(3cos\beta - 2) + \frac{0{,}2 \times 1}{1} = 6\,cos\beta - 3{,}8$

7 - لدينا عند النقطة C تنعدم سرعة الجسم، وبالتالي $a_n = 0$ ، ومنه $R = Pcos\alpha$ (4)

وبتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين النقطتين B و C : $\frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 = 0$ ، أيّ $v_B^2 = 2gr(1 - cos\alpha)$ ، ومنه

$cos\alpha = 1 - \frac{v_B^2}{2gr} = 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$ وبالتعويض في العلاقة (4): $R = 0{,}2 \times 10 \times 0{,}95 = 1{,}9\ N$