سلطان الوحدة الثانية

تطوّر جملة ميكانيكية

الدرس الثاني

في هذا الدرس يجب أن:

1 - أعرف أن مجال الجاذبية الأرضية ثابت على ارتفاع من رتبة الكيلوميترات عن سطح الأرض، وأن قوّة جذب الأرض للأجسام ما هي إلا قوة ثقل هذه الأجسام.

2 - أعرف أن السقوط الشاقولي يكون وفق الشاقول نحو الأسفل أو نحو الأعلى، ويكون هذا السقوط حرّا إذا كان الجسم يخضع فقط لقوّة ثقله، ويكون السقوط حقيقيا إذا تدخّل تأثير الهواء عليه أو أي مائع آخر.

3 - أعرف أن قوة الاحتكاك لجسم مع مائع تتناسب مع سرعته مرفوعة للأس n أي $f = k\,v^n$ ، وأننا لا ندرس إلا حالتين هما من أجل $n = 1$ و $n = 2$.

4 - أعرف أن دافعة أرخميدس (Archimède) في الموائع (الغازات والسوائل) هي ثقل المائع الذي يزيحه الجسم.

5 - أعرف كيفية تأسيس المعادلتين التفاضليتين في الحالتين $f = k\,v$ و $f = k'v^2$.

6 - أعرف أن السرعة الحدّية لجسم يسقط في مائع هي السرعة التي يكتسبها عندما يصبح المجموع الشعاعي للقوى المؤثّرة عليه معدوما.

7 - أعرف أن السقوط الحر هو حركة متغيرة بانتظام تسارعها $\vec{a} = \vec{g}$.

8 - أعرف كل الخطوات لدراسة حركة قذيفة، واستعمال مبدأ انحفاظ الطاقة في كل الحالات.

باختصـــــار

1 ـ السقوط الشاقولي الحقيقي:

في الحالة العامة يخضع الجسم إلى القوى التالية، وهو يسقط نحو الأسفل:

قوة ثقله P ، قوة الاحتكاك مع المائع $f = kv^n$ ، دافعة أرخميدس $F_A = \rho_f V g$ ، حيث ρ_f : الكتلة الحجمية للمائع و V حجم الجسم.

1 - 1 - المعادلتان التفاضليتان للسرعة:

- حالة $f = kv$: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{F_A}{m}$
- حالة $f = k'v^2$: $\frac{dv}{dt} + \frac{k'}{m}v^2 = g - \frac{F_A}{m}$

1 - 2 - السرعة الحدية:

- حالة $f = kv$: $v_l = \frac{mg - F_A}{k}$
- حالة $f = k'v^2$: $v_l = \sqrt{\frac{mg - F_A}{k}}$

1 - 3 - التسارع الابتدائي:

هو تسارع الجسم عند اللحظة $t = 0$ ، أي عندما تكون $v = 0$ ، وبالتالي $a_0 = g - \frac{F_A}{m}$

1 - 4 - الزمن المميّز للسقوط (ثابت الزمن):

في الحالتين: $\tau = \frac{v_l}{a_0}$ ، حيث a_0 هو تسارع الجسم عند $t = 0$ (التسارع الابتدائي)

2 ـ السقوط الشاقولي الحر:

التسارع: $\vec{a} = \vec{g}$ $(a = \mp g)$ ، وذلك حسب توجيه المحور بالنسبة لشعاع الثقل $\vec{P}$.

السرعة: $v = gt + v_0$

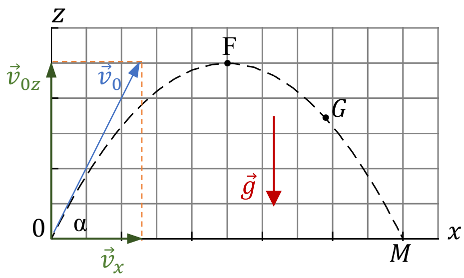
الفاصلة: $z = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 t + z_0$

العلاقة بين المسافة المقطوعة (h) من النقطة A إلى النقطة B والمدة الزمنية t اللازمة لقطعها: $h = AB = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_A t$

العلاقة بين السرعة والمسافة المقطوعة من النقطة A إلى النقطة B: $v_B^2 - v_A^2 = 2g\,h$ ، حيث $AB = h$

3 - حركة قذيفة في المجال الأرضي:

إذا قُذف جسم في المستوي الشاقولي (Oxz) أو (Oyz) من مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المحور الأفقي زاوية حادّة α.



يكون لدينا: $\vec{a} = \vec{g}$

مركّبتا شعاع التسارع: $\vec{a}\ (0\,, -g)$

مركّبتا شعاع السرعة الابتدائية: $\vec{v}_0\ (v_0 cos\alpha\ ,\ v_0 sin\alpha)$

مركّبتا شعاع سرعة القذيفة عند اللحظة t : $\vec{v}\ (v_0 cos\alpha\ , -gt + v_0 sin\alpha)$

مركّبتا شعاع موضع القذيفة: $\overrightarrow{OG}\ \left(v_0 cos\alpha . t\ \ ,\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha . t\right)$

معادلة المسار: $z = -\frac{g}{2\, v_0^2\, cos^2\alpha}\, x^2 + tn\alpha\ x$

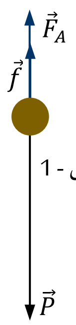
إحداثيا المدى: $M\ \left(\frac{v_0^2\, sin2\alpha}{g}\ ,\ 0\right)$ ، احداثيا الذروة : $F\ \left(\frac{v_0^2\, sin2\alpha}{2g}\ ,\ \frac{v_0^2\, sin^2\alpha}{2g}\right)$.

شعاع السرعة عند الذروة يكون أفقيا، حيث $v_z = 0$

الدرس بالتفصيل

1 - السقوط الشاقولي الحقيقي لجسم :

يخضع الجسم أثناء سقوطه في مـائع (سائل أو غاز) إلى القوتين $\vec{f}$ و $\vec{F}_A$ (الشكل - 1) ، وهما قوتان معاكستان لقوة ثقل الجسم.



الشكل - 1

دافعة أرخميدس $\vec{F}_A$:

لما نغمر جسما في إناء يحتوي على الماء أو أي سائل آخر، فإن مستوى الماء في الإناء يصعد.
الحجم الزائد (المُزاح من طرف الجسم) هو نفسه حجم الجسم. لو أخذنا هذا الحجم من السائل المُزاح ووزناه في ميزان نجد كتلته m' ، ولو حسبنا ثقله $P' = m'g$ ، فإن هذا الثقل هو نفسه شدّة القوة التي نسميها دافعة أرخميدس.
نفس الشيء بالنسبة لجسم مغمور في غاز، فإن دافعة أرخميدس هي ثقل الغاز الذي أزاحه الجسم.

خصائص دافعة أرخميدس:

الحامل: هو الشاقول، أيْ نفس حامل شعاع ثقل الجسم.

الجهة: نحو الأعلى.

نقطة التأثير: مركز عطالة المائع المزاح، والذي ينطبق مع مركز عطالة الجسم عادة (مثلا كرة متجانسة).

الشدّة: $F_A = m'g$ ، ولدينا كتلة السائل المزاح هي $m' = \rho_f\ V$ ، أي $\boldsymbol{F_A = \rho_f\ V\ g}$

حيث: ρ_f هي الكتلة الحجمية للمائع ، و V هو حجم الجسم. (مائع: معناه سائل أو غاز)، **ندرس فقط السقوط في الهواء.**

قوّة الاحتكاك $\vec{f}$:

تتناسب مع سرعة الجسم، حيث كلما تزداد السرعة تزداد مقاومة المائع للجسم.

- في حالة سرعة الجسم صغيرة: نقول أن الجسم ينساب في السائل، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل : $\vec{f} = -k\vec{v}$ ، وإذا نُسبت لمحور مزوّد بشعاع الوحدة $\vec{\imath}$ ، نكتبها بالشكل: $\vec{f} = -kv\ \vec{\imath}$ ، حيث المحور موجّه في جهة الحركة. شدّتها $\boldsymbol{f = kv}$.
- في حالة سرعة الجسم كبيرة نسبيا: تحدث اضطرابات خلف الجسم أثناء حركته في المائع، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل:
$\vec{f} = -k'v\vec{v}$ أو $\vec{f} = -k'v^2\,\vec{\imath}$. شدّتها $\boldsymbol{f = k'v^2}$

نسمّي k و k' معامل الاحتكاك، ويتعلّق هذان المعاملان بشكل الجسم وطبيعة المائع.

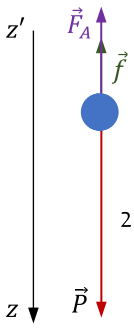
تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$\vec{P}+\vec{f}+\vec{F}_A=m\vec{a}$ ، حيث m كتلة الجسم، وبالإسقاط على المحور الشاقولي Oz (الشكل - 2):

$P-f-F_A=ma$

- حالة $\boldsymbol{f=kv}$

$mg-kv-F_A=ma$ ، ولدينا $a=\frac{dv}{dt}$ ، وبالتالي $\boldsymbol{\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g-\frac{F_A}{m}}$ (1)



الشكل - 2

السرعة الحدية:

عندما يسقط الجسم تتزايد سرعته، حيث في نفس الوقت تتزايد قوة الاحتكاك، لأن هذه الأخيرة تتناسب مع السرعة.

ونعلم أن أثناء السقوط لا يتغير ثقل الجسم وكذلك دافعة أرخميدس لا تتغير (نعتبر دائما عند $t=0$ دافعة أرخميدس موجودة، أي نعتبر أن الجسم يكون مغمورا تماما في المائع عند اللحظة $t=0$). وعندما يصبح مجموع قوتي الاحتكاك ودافعة أرخميدس مساويا لقوّة الثقل، يكون حينها المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على الجسم معدوما، وبالتالي يصبح التسارع معدوما.

لأن $\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{a}$ ، $m\neq 0$ ، ومنه $a=0$ ، لأن $a=\frac{dv}{dt}$.

من العلاقة (1): $\frac{k}{m}v_l=g-\frac{F_A}{m}$ ، ومنه $\boldsymbol{v_l=\frac{mg-F_A}{k}}$

التسارع الابتدائي:

نضع في العلاقة (1) : $v=0$ ، ونجد $\boldsymbol{\frac{dv}{dt}=a_0=g-\frac{F_A}{m}}$

عندما تكون دافعة أرخميدس مهملة أمام ثقل الجسم يكون $\boldsymbol{a_0=g}$

- حالة $\boldsymbol{f=k'v^2}$

$\boldsymbol{\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2=g-\frac{F_A}{m}}$ (2)

السرعة الحدية:

من العلاقة (2): $\frac{k'}{m}v_l^2=g-\frac{F_A}{m}$ ، ومنه $\boldsymbol{v_l=\sqrt{\frac{mg-F_A}{k'}}}$

ملاحظة: يكتسب الجسم نفس السرعة الحدّية سواء تركناه ينزل بدون سرعة ابتدائية أو أعطيناه سرعة شاقولية عند اللحظة $t=0$.

التسارع الابتدائي:

نضع في العلاقة (2) : $v=0$ ، ونجد $\boldsymbol{\frac{dv}{dt}=a_0=g-\frac{F_A}{m}}$ (نفس التسارع الابتدائي في الحالتين)

ملاحظة: التسارع الابتدائي يختلف في حالتي سقوط الجسم بدون سرعة ابتدائية وسقوطه بإعطائه سرعة شاقولية عند اللحظة $t=0$.

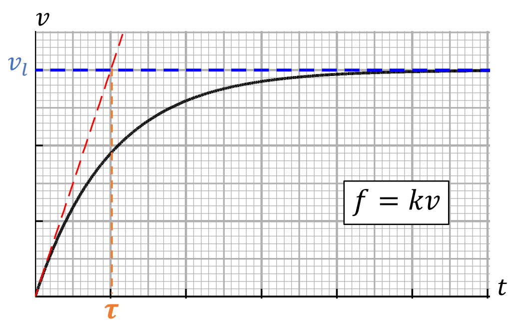
لأن إعطاء سرعة للجسم عند $t=0$ ، معناه قوة الاحتكاك موجودة عند $t=0$ ، والتسارع يتعلق بمجموع القوى.

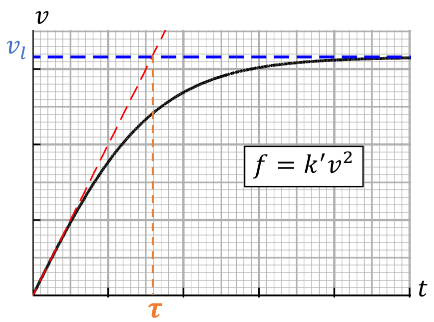
التحليل البعدي لمعاملي الاحتكاك $\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{k'}$:

$[k]=\frac{[f]}{[v]}=\frac{M\,L\,T^{-2}}{L\,T^{-1}}=M\,T^{-1}$ ، ومنه وحدة المعامل k هي kg/s .

$[k']=\frac{[f]}{[v^2]}=\frac{M\,L\,T^{-2}}{L^2\,T^{-2}}=M\,L^{-1}$ ، ومنه وحدة المعامل k' هي kg/m .

التمثيل البياني للسرعة بدلالة الزمن:





الثابت المميّز للحركة:

نسمّي τ الثابت المميز للحركة أو ثابت الزمن، حيث أن سواء في الحالة $f = kv$ أو $f = k'v^2$ ، فإن $\boldsymbol{\tau = \frac{v_l}{a_0}}$

إضـــافة: (موجّهة للأستاذ لتأليف التمارين)

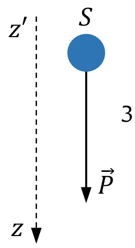
في حالة كون الجسم عبارة عن كرة نصف قطرها r تتحرك شاقوليا داخل مائع كتلته الحجمية ρ ومعامل لزوجته η

معامل الاحتكاك $\boldsymbol{k}$: يتعلق بلزوجة المائع وشكل الجسم، $k = 6\pi\eta r$

معامل الاحتكاك $\boldsymbol{k'}$: لا يتعلّق بلزوجة المائع بل يتعلق فقط بشكل الجسم والكتلة الحجمية للمائع، $k' = 0{,}22\pi\rho\, r^2$

2 - السقوط الشاقولي الحر:

نقول عن جسم (S) أنه في سقوط حرّ إذا كان أثناء حركته لا يخضع إلا لقوّة ثقله $\vec{P}$. (الشكل - 3)



الشكل - 3

نطبق القانون الثاني لنيوتن على جسم في سقوط حرّ.

$\vec{P} = m\vec{a}$ ، وبالإسقاط على المحور $z'z$: $P = ma$ ، وبالتالي $a = g$

المعادلة التفاضلية للسرعة هي $\frac{dv}{dt} - g = 0$

2 - 1 - معادلات السقوط الحر الشاقولي:

التسارع: $a = g$ ، حيث g قيمة جبرية (أي موجبة أو سالبة) .

السرعة: $v = gt + C$ ؛ لأن $a = \frac{dv}{dt}$ ، ولتحديد الثابت C لدينا $v = v_0$ عند اللحظة $t = 0$ ، وبالتالي $C = v_0$

المعادلة الزمنية للسرعة هي $\boldsymbol{v = gt + v_0}$

الفاصلة $\boldsymbol{z}$: نعلم أن $v = \frac{dz}{dt}$ ، وبالتالي $z = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 t + C$ ، ولتحديد C' لدينا $z = z_0$ عند اللحظة $t = 0$

$z_0 = \frac{1}{2}g \times 0 + v_0 \times 0 + C'$ ، وبالتالي $C' = z_0$.

المعادلة الزمنية للفاصلة: $\boldsymbol{z = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 t + z_0}$

2 - 2 - القوانين الخاصة بالسقوط الشاقولي الحر:

المسافة المقطوعة: $\boldsymbol{h = \frac{1}{2}gt^2 + v_A t}$ ، حيث t هي المدة الزمنية لقطع المسافة h و v_A سرعة المتحرّك عند بداية المسافة h .

سرعة الجسم عند لحظة ما: إذا كانت سرعة الجسم عند لحظة ما هي v_A وكانت عند لحظة بعدها v_B ، فإن : $\boldsymbol{v_B - v_A = gt}$

حيث t هي المدة المستغرقة بين A و B .

العلاقة بين السرعة والمسافة: إذا كانت سرعة الجسم عند لحظة ما هي v_A وكانت عند لحظة بعدها v_B ، فإن $\boldsymbol{v_B^2 - v_A^2 = 2gh}$

حيث h هي المسافة AB .

3 ـ حركة قذيفة في مجال الجاذبية الأرضية:

القذيفة التي ندرسها في هذا الموضوع هي جسم يُقذف من النقطة O ؛ مبدأ المعلم $(Ox\,,Oy\,,Oz)$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ تصنع مع المستوي الأفقي التي قذفت منه زاوية $\alpha \in [0\;,\;90°[$

ملاحظة: إذا كانت $\alpha = 90°$ يكون القذف شاقوليا (سبق لنا دراسة هذه الحالة).

ندرس حركة القذيفة في المستوي (Oxz) أو (Oyz) ، أي في مستو شاقولي. (الشكل - 4)

نقذف عند اللحظة $t = 0$ جسما نعتبره نقطة مادية من مبدأ الإحداثيات بسرعة $\vec{v}_0$ تصنع مع المحور Ox الزاوية α .

ندرس حركة القذيفة في المستوي الشاقولي (Oxz) . التسارع الأرضي $\vec{g}$ دائما شاقولي نحو الأسفل.

ملاحظة: نهمل تأثير الهواء على الحرك عند دراسة قذيفة.

دراسة حركة القذيفة:

تطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا:

$\vec{P} = m\vec{a}$

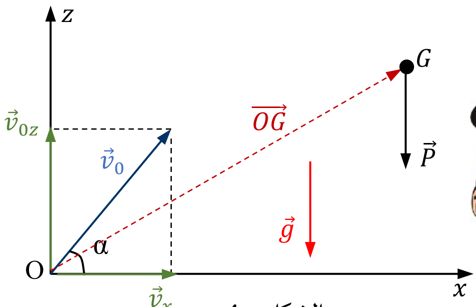
$m\vec{g} = m\vec{a}$ ، وبالتالي $\vec{a} = \vec{g}$

مركبتا شعاع التسارع في المعلم هما $\vec{a}\ (0\ ,-g)$

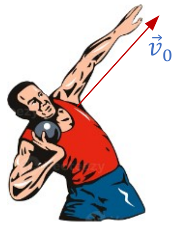
مركبتا شعاع السرعة الابتدائية هما $\vec{v}_0\ (v_0 cos\alpha\ ,\ v_0 sin\alpha)$

مركبتا شعاع الموضع هما $\overrightarrow{OG}\ \left(v_0 cos\alpha\,.t\ ,\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha\,.t\right)$.

مركبتا شعاع السرعة عند اللحظة $t > 0$ هما $\vec{v}\ (v_0 cos\alpha\ ,-gt + v_0 sin\alpha)$



الشكل – 4



معادلة المسار:

لدينا $x = v_0 cos\alpha\,.t$ ، ومنه $t = \frac{x}{v_0\ cos\alpha}$ (1)

ولدينا $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha\,.t$ ، وبتعويض الزمن بالعبارة (1): $z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\ cos\alpha}\right)^2 + v_0 sin\alpha\,.\left(\frac{x}{v_0\ cos\alpha}\right)$

$z = -\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,x^2 + tn\alpha\,.x$ ، وهي معادلة من الشكل $z = a\,x^2 + b\,x$ (معادلة قطع مكافئ). (الشكل - 5)

النقطتان الخاصتان على المسار:

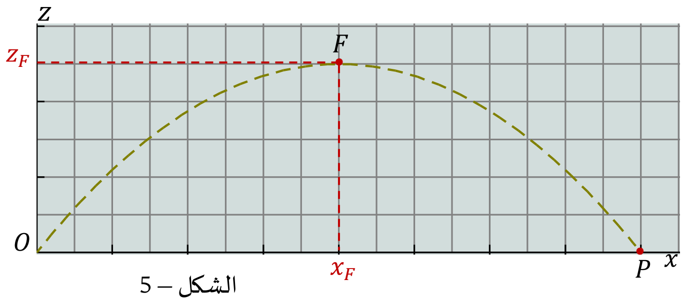
الذروة (F) : هي أعلى نقطة تصلها القذيفة، حيث أن مركّبة السرعة على Oz تنعدم في هذه النقطة، أي

$-gt + v_0 sin\alpha = 0$ ، ومنه $t = \frac{v_0 sin\alpha}{g}$.

وبالتالي $x_F = v_0 cos\alpha\,.\frac{v_0 sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\ sin2\alpha}{2g}$

$z_F = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 sin\alpha\,.\left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)$

$z_F = \frac{v_0^2\,sin^2\alpha}{2g}$



الشكل – 5

المدى: أكبر مسافة أفقية تقطعها القذيفة، أي هي المسافة بين نقطة قذفها O والنقطة P التي تنتمي للمستوي الأفقي الذي يشمل النقطة O .

لإيجاد x_P نضع $z = 0$ ، أي $-\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,x^2 + tn\alpha\,.x = 0$

$-\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,x^2 + \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\,.x = 0$ ، $x\left(-\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,x + \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right) = 0$ ، $x = 0$: توافق نقطة القذف .

$-\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,x + \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = 0$ ، ومنه $x_P = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}$

يمكن استنتاج x_P من عبارة x_F ، حيث $x_P = 2\,x_F$ (المحور الشاقولي المار بـ F هو محور تناظر للمسار).

تحديد سرعة القذيفة عند اللحظة t بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة:

نهمل تأثير الهواء على الجسم (الاحتكاك ودافعة ارخميدس) تكون الجملة شبه معزولة، أي أن طاقتها الكلّية تكون محفوظة.

الطاقة الكلية هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية للجسم، $E = E_{pp} + E_c$

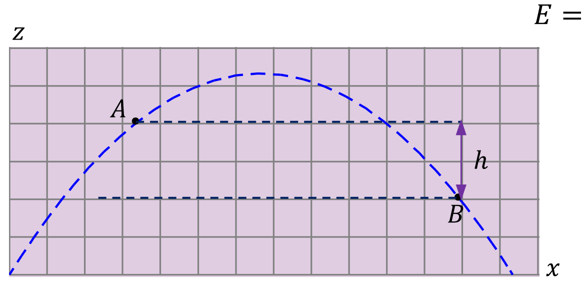
$E_B = E_A$ لأن الطاقة الكلّية ثابتة. m : كتلة القذيفة. (الشكل – 6)

مبدأ انحفاظ الطاقة بأخذ الجملة (القذيفة + الأرض):

$E_{cA} + E_{ppA} = E_{cB} + E_{ppB}$

$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$

$v_B^2 = v_A^2 + 2g\,(h_A - h_B)$



الشكل - 6

لدينا $h_A - h_B = h$ أينما كان الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية.

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

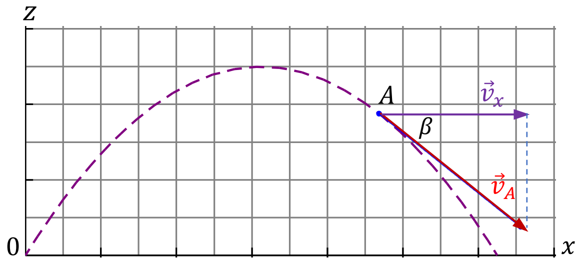
إذا كانت النقطة B توجد أعلى النقطة A ، يكون $h_B > h_A$ ، وبالتالي يكون $h < 0$

مبدأ انحفاظ الطاقة بأخذ الجملة (القذيفة):

$E_{cA} + W(\vec{P}) = E_{cB}$ ، حيث من A إلى B (الشكل - 6) يكون عمل الثقل $\vec{P}$ محرّكا، أي موجبا. (قبل الذروة يكون سالبا، وبعد الذروة موجبا).

$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$ ، ومنه $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$

كيفية تحديد الزاوية بين شعاع السرعة والمستوي الأفقي:



الشكل – 7

هذه الزاوية في النقطة A هي β بين شعاع السرعة و $\vec{v}_x$. (الشكل - 7)

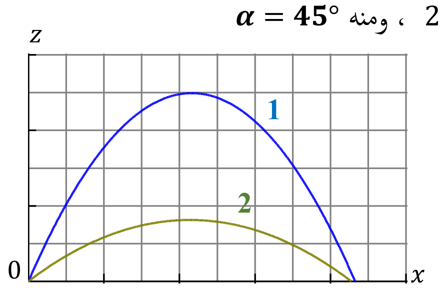
نحسب أولا طويلة السرعة في النقطة A بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة.

ولدينا $cos\beta = \frac{v_x}{v_A}$ ، وبما أن مركّبة السرعة على المحور $\overrightarrow{Ox}$ ثابتة

وهي $v_x = v_0 cos\alpha$ ، إذن $\boldsymbol{cos\beta = \frac{v_0 cos\alpha}{v_A}}$

زاوية القذف الموافقة لأكبر مدى:

لدينا $x_P = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}$. تكون للمدى أكبر قيمة من أجل $sin2\alpha = 1$ ، أي $2\alpha = 90°$ ، ومنه $\boldsymbol{\alpha = 45°}$



الشكل - 8

نفس المدى من أجل زاويتي قذف مجموعها $\mathbf{90°}$:

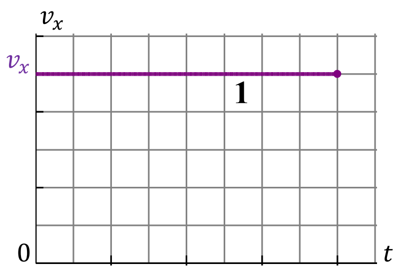
$x_{P1} = \frac{v_0^2 sin2\alpha_1}{g}$ ، $x_{P2} = \frac{v_0^2 sin2\alpha_2}{g}$

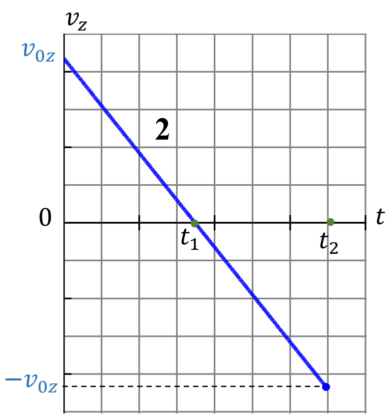
نضع $x_{P1} = x_{P2}$ ، وبالتالي $\frac{v_0^2 sin2\alpha_2}{g} = \frac{v_0^2 sin2\alpha_1}{g}$ ، لدينا حلان هما :

$\alpha_1 = \alpha_2$ (حل بديهي) ، و $2\alpha_1 = 180 - 2\alpha_2$ ، ومنه $\boldsymbol{\alpha_2 = 90 - \alpha_1}$

المسار (1) من أجل $\alpha_1 = 60°$ والبيان (2) من أجل $\alpha_2 = 30°$. (الشكل- 8)

التمثيل البياني للسرعتين $v_x(t)$ و $v_z(t)$:





مركّبة السرعة على المحور $\overrightarrow{Ox}$ ثابتة مهما كان الزمن (البيان 1) .

مركّبة السرعة على المحور $\overrightarrow{Oz}$ هي :

$v_z = -gt + v_0 sin\alpha$ (البيان 2)

ميل المستقيم يمثّل $-g$

اللحظة t_1 هي لحظة وصول القذيفة إلى الذروة .

اللحظة t_2 هي لحظة وصول القذيفة إلى نقطة المدى.

من هذين البيانين نحسب v_0 ؛ حيث:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{0z}^2}$$

ونحسب كذلك الزاوية α ؛ إما من $v_x = v_0 cos\alpha$

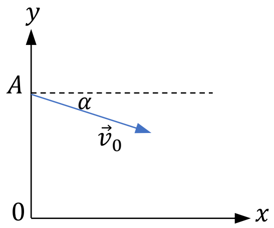
أو من $v_{0z} = v_0 sin\alpha$.

ملاحظة هامة:

العلاقات السابقة التي وجدناها في دراسة هذه القذيفة تتغير بتغيّر الشروط الابتدائية وتوجيه محاور المعلم، وبالتالي عندما ندرس حركة قذيفة يجب الانتباه جيدا للمعلم، ثم نطبّق القانون الثاني لنيوتن ونجد دائما $\vec{a} = \vec{g}$.

نكتب مركّبتي التسارع ومركّبتي السرعة الابتدائية في المعلم المعطى، أو الذي نحدّده نحن.

مثلا في الشكل - 9 : قذفنا الجسم من النقطة A عند اللحظة $t = 0$.



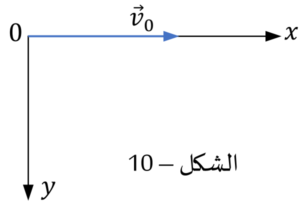
الشكل – 9

$\vec{a}\ (0\ ,-g)$ ، $\vec{v}_0\ (v_0 cos\alpha\ ,-v_0 sin\alpha)$ ، $\vec{v}\ (v_0 cos\alpha\ ,-gt - v_0 sin\alpha)$

شعاع الموضع: $\overrightarrow{OG} = \left(v_0 cos\alpha\ .t\ ,-\frac{1}{2}gt^2 - v_0 sin\alpha\ .t + OA\right)$

معادلة المسار: $y = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x^2 - tn\alpha\ .x + OA$

مثلا في الشكل - 10 : قذفنا الجسم من النقطة O عند اللحظة $t = 0$.



الشكل – 10

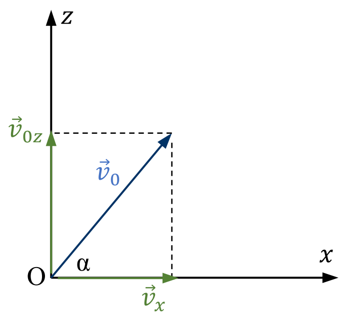
$\vec{a}\ (0\ ,+g)$ ، $\vec{v}_0\ (v_0\ ,0)$ ، $\vec{v}\ (v_0\ ,gt)$

شعاع الموضع: $\overrightarrow{OG} = \left(v_0\ t\ ,\ \frac{1}{2}gt^2\right)$

معادلة المسار $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$

4- تمثيل الطاقة الحركية والكامنة بدلالة الزمن:

نتطرّق للحالة العامة؛ الشكل - 11



الشكل - 11

4 - 1 - الطاقة الكامنة الثقالية:

$E_{pp} = mgz$ ، ولدينا $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha\ .t$ ، وبالتالي

$$E_{pp} = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha\ .t\right)$$

$$\boldsymbol{E_{pp} = -\frac{1}{2}mg^2t^2 + v_0 mg\ sin\alpha\ .t}$$

الطاقة الكامنة الثقالية من الشكل $E_{pp} = b\ t^2 + c\ t$

4 - 2 - الطاقة الحركية:

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ ، ولدينا عند كل لحظة $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ ، وبالتالي $E_c = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2)$

$$E_c = \frac{1}{2}m[(v_0^2 cos^2\alpha) + (-gt + v_0 sin\alpha)^2]$$

$E_c = \frac{1}{2}m[(v_0^2 cos^2\alpha) + (g^2t^2 - 2gtv_0 sin\alpha + v_0^2 sin^2\alpha)]$ ، $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgv_0 sin\alpha\ .t + \frac{1}{2}mv_0^2}$

الطاقة الحركية من الشكل $E_c = b\ t^2 + c\ t + d$

4 - 3 - الطاقة الكليّة:

الطاقة الكليّة هي $E = E_c + E_{pp}$

$$E = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgv_0 sin\alpha\ .t + \frac{1}{2}mv_0^2 + \left(-\frac{1}{2}mg^2t^2 + v_0 mg\ sin\alpha\ .t\right)$$

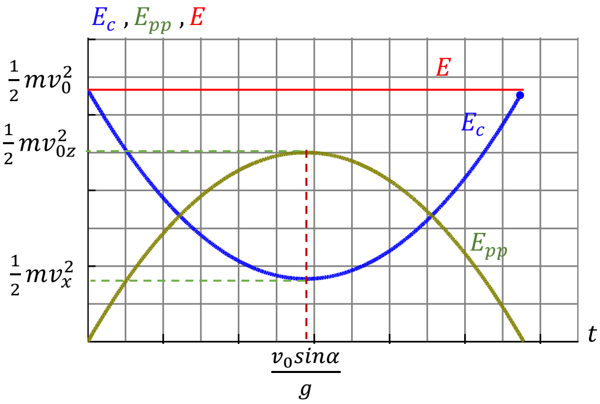
$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

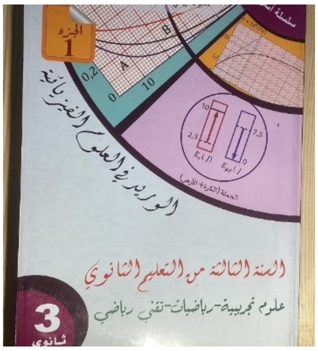
4 - 4 - التمثيل البياني للطاقات E_c ، E_{pp} ، E بدلالة الزمن:

تتناقص الطاقة الحركية لتصبح لها أصغر قيمة عند الذروة، ثم تتزايد لتصبح لها نفس القيمة الابتدائية عند نقطة المدى.

تتزايد الطاقة الكامنة الثقالية، لتصبح لها أكبر قيمة عند الذروة، ثم تتناقص وتنعدم عند نقطة المدى (باعتبار الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية هو المستوي الأفقي المار بنقطة القذف).

يكون عند كل لحظة: $E = E_c + E_{pp}$





الكتاب الجديد للأستاذ ع. قزوري / الجزء 1

الوريد في العلوم الفيزيائية من سلسلة سلطان أسرار النجـــاح

خذ الوريد...فلا تحتاج إلى مزيد، إنه الوحيد الفريد

إذا كنتَ تائها في بحر الفيزياء، فاليوم بصرك حديد