01 أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2+2i\bar{z}=0$ ...(1)

ب)في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط $A(2i)$ ، $B(-\sqrt{3}-i)$ و $D(\sqrt{3}-i)$

1)عين الإحداثيات القطبية للنقط A ، B ، D ، ثم علمها

2)أثبت أن المثلث ABD متقايس الأضلاع. ثم بين أن النقط A ، B ، D تنتمي لدائرة واحدة يطلب عين عناصرها المميزة

3)عين لاحقة النقطة C بحيث $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

استنتج طبيعة الرباعي ABCD وعين مساحته

02 L عدد مركب معرف بـ: $L(z)=\dfrac{z+2i}{z+1}$ حيث $z\neq -1$

1)اكتب $L(1+i)$ ، $L(1-i)$ على الشكل الجبري

2) نضع $z=x+iy$ حيث x ، y عددان حقيقيان

أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $L(z)=z$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $L(z)=\bar{z}$ حيث $\bar{z}$ مرافق z

3)في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط $B(-2i)$ ، $A(-1)$ و $M(z)$.

عين ثم انشئ مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة:

* $L(z)$ حقيقيا، * $L(z)$ تخيليا صرفا، * $|L(z)|=1$

03 α عدد حقيقي غير معدوم .عين طويلة وعمدة العدد z وذلك حسب قيم α في كل حالة: 1) $z=\alpha$ ، 2) $z=\alpha i$

3) $z=\alpha+\alpha i$ ، 4) $z=\alpha-\alpha i$ ، 5) $z=\alpha+\alpha\sqrt{3}i$

6) $z=\alpha-\alpha\sqrt{3}i$ ، 7) $z=\alpha\sqrt{3}+\alpha i$ ، 8) $z=\alpha\sqrt{3}-\alpha i$

04 α عدد حقيقي غير معدوم ، ناقش وحسب قيم k طويلة وعمدة للعدد المركب z في كل حالة من الحالات التالية :

1) $z=k(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ ، 2) $z=k(\cos(\alpha)-i\sin(\alpha))$

3) $z=k(\sin(\alpha)+i\cos(\alpha))$ ، 4) $z=k(\sin(\alpha)-i\cos(\alpha))$

05 z ، u ، v أعداد مركبة حيث:

$z=(\sqrt{3}+3)+i(\sqrt{3}-3)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\dfrac{z}{u}$.

1) اكتب v على الشكل الجبري .

2) عيّن الطويلة وعمدة لكل من الأعداد z ، u ، v

3)استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\tan\dfrac{\pi}{12}$ ، ثم جد $\left(\dfrac{z}{2\sqrt{6}}\right)^{2014}$

4)عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z}{2\sqrt{6}}\right)^{n}\in\mathbb{R}$

06 1) حل في $\mathbb{C}$ الجملة التالية : $\begin{cases}\sqrt{3}z_1-z_2=-2\\ z_1-\sqrt{3}z_2=-2i\end{cases}$

2) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

A وB نقطتان لاحقتاهما $z_A=-\sqrt{3}+i$ و $z_B=-1+\sqrt{3}i$

أ)اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم مثل A وB

ب) أحسب طويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_A}{z_B}$.

استنتج طبيعة المثلث OAB وقيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

3)عيّن لاحقة النقطة C بحيث يكون الرباعي ACBO معين

مثل النقطة C ثم احسب مساحته المثلث ABC .

07 I-نعتبر العدد المركب: $2\alpha=(-1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$

1) بيّن أن: $\alpha^2=-\sqrt{3}+i$ ، ثم أكتب α^2 على الشكل الأسي .

استنتج طويلة وعمدة للعدد المركب α

2) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

II -نعتبر في C المعادلة: $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$......(1)

1)بين أن العدد المركب $z_1=\alpha^2$ هوحلا للمعادلة (1) .

ثم استنتج الحل الثاني z_2 للمعادلة (1).

2)عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$

3)ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته النقطة M . عين وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|\alpha(1-z)|=|2z_2|$.

08 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B وC التي لواحقها على الترتيب الأعداد المركبة:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ و $z_B=z_A+z_C$.

1)أكتب: z_A على الشكل الأسي z_B و z_C على الشكل الجبري

°2)تحقق أن: $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{2013}+\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2013}=1-i$.

3-أ)علم بدقة النقط A ، B وC في المستوي

عين قيسا للزاوية الموجه $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})$

ب -)أثبت أن الرباعي OABC مربعا يطلب حساب مساحته.

جـ)عين طويلة وعمدة z_B ، ثم بين أن: $\tan(\dfrac{5\pi}{12})=2+\sqrt{3}$.

°4) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي

بحيث: $|z-z_A|=|z-z_D|$ علما أن: $z_D=\sqrt{3}-i$.

أ)بيّن أن (E) هي نقط حامل محور الفواصل.

ب)برهن أن المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_D}\right)^2=i$ تقبل حلول حقيقية

09 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
نعتبر النقطتين A، B التي لاحقتاهما على الترتيب:
$z_A=(\sqrt3+1)+(\sqrt3-1)i$ ، $z_B=(\sqrt3-1)+(\sqrt3+1)i$
1- أ) اكتب العدد المركب $z_C=z_A+z_B$ على شكله الأسي.
ب) بين أن العدد المركب z_C^{2012} عدد حقيقي سالب.
2) أ. تحقق أن: $z_A^2=4(\sqrt3+i)$ و $z_B=i\overline{z_A}$
ب. اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z_A^2
جـ. بين أن: $|z_A|=|z_B|$ و $\arg(z_A)+\arg(z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
د. استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين z_A و z_B.
3) عين قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ استنتج نوع المثلث OAB
4) جد مجموعة النقط $M(z)$ من حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$

10 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z:
$$2z^2-\left[1+(2+\sqrt3)i\right]z-\sqrt3+i=0....(E)$$
أ- تحقق أن العدد المركب $z_1=i$ حلا للمعادلة (E).
ب-استنتج الحل الثاني z_2. ثم أحسب العدد z_2^{2014} .
2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
لتكن النقط A، B وC التي لواحقها z_1 ، z_2 و $z_3=e^{\frac{2\pi}{3}i}$.
أ-بيّن أن النقطتين O وC تنتميان إلى دائرة مركزها B.
ب-جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BC})$، استنتج نوع المثلث OBC
جـ-عيّن مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $\frac{z-z_2}{z-z_1}\in\mathbb{R}^-$

11 1) حل في $\mathbb{C}$، كلا من المعادلتين :
$z^2-2z+5=0$ ؛ $z^2-2(1+\sqrt3)z+5+2\sqrt3=0$.
2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
نعتبر النقط A،B، C وD صور الأعداد المركبة:
$1-2i$ ، $1+\sqrt3+i$ ، $1+2i$ و $1+\sqrt3-i$ على الترتيب
أ ـ بين المثلث ABC قائم .
ب ـ أكتب معادلة للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .
جـ ـ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (γ).
د ـ أنشئ (γ) والنقط A، B، C وD في المعلم السابق

12 ليكن العدد المركب: $\alpha=\frac{\sqrt3-1}{2}-i\frac{\sqrt3+1}{2}$
1-أحسب α^2 ثم أكتب α^2 على الشكل المثلثي.
إستنتج الطويلة وعمدة لعدد α .
2) أحسب كلا من $\sin(\frac{7\pi}{12})$ ، $\cos(\frac{7\pi}{12})$
3) أحسب كلا من α^{2014} و α^{1435} وبين أن: $\alpha^{12k}\in\mathbb{R}$
4) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
عين مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $|z|=|\alpha(z-1)|$.

13 1) ليكن كثير الحدود p للمتغير المركب z المعرف كما يلي : $p(z)=z^4-2\sqrt3z^3+8z^2-8\sqrt3z+16$
أ) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z فإن: $\overline{p(z)}=p(\overline{z})$
ب) تحقق أن: $p(\sqrt3+i)=p(-2i)=0$.
أستنتج الجذرين الآخرين لـ $p(z)$
2) المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
نعتبر النقط: A، B، C، D التي لواحقها :
$z_A=i+\sqrt3$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ ، $z_D=\overline{z_C}$
أ) مثل النقط: D، C، B، A في المستوي المركب
ب) اثبت ان النقط D، C، B، A تنتمي الي نفس الدائرة
3) لتكن E نظيرة B بالنسبة الى O. بين أن :
$z_A-z_C=(z_E-z_C)e^{-i\frac{\pi}{3}}$، أعط تفسيرا هندسيا للمساواة.

14 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-2)(z^2+2\sqrt2z+4)=0$
نسمّي حلولها z_1، z_2 و z_3 حيث $z_1\in\mathbb{R}$ و $\mathrm{Im}(z_2)\succ0$
2-أ) أكتب كلا من z_3 ثم z_2+z_1 على الشكل ألأسي
ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.
3) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
لتكن النقط A، B وC التي لواحقها $z_A=\sqrt6-\sqrt2$
$z_B=-\sqrt2(1+i)$ و $z_C=-\sqrt2(1-i)$
أ) أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$
ب) ما طبيعة المثلث ABC؟ برّر جوابك.

15 1) نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ والمعرف كمايلي:
$P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$
حيث z هوالمجهول و α وسيط حقيقي من المجال $\alpha\in[0;\pi]$
أ-بيّن أن: $P(z)=(z-1)(z^2+(2\sin\alpha)z+1)$
ب-حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $P(z)=0$
2) نضع: $z_1=-\sin\alpha+i\cos\alpha$ و $z_2=-\sin\alpha-i\cos\alpha$
عين الشكل المثلثي والأسي لكل من z_1 و z_2
3) نفرض في ما سيأتي : $\alpha=\frac{\pi}{6}$.
أ) علم النقط A، B وC التي لواحقها على الترتيب 1، z_1 و z_2
في المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
ب) بيّن أن النقط A، B وC تنتمي لدائرة واحدة .
جـ) عيّن الطويلة وعمدة العدد $\frac{z_2-1}{z_1-1}$ استنتج نوع المثلث ABC

الأستاذ: بالعبيدي محمّد العربي larbibelabidi@gmail.com