بكالوريات شعبة علوم تجريبية

دورة2013 (الموضوع1)

I-1)تبيان أن (v_n) م هندسية وتحديد أساسها وحدّها الأول

(v_n)متتالية هندسية معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا: $v_{n+1}=\frac{5^{n+2}}{6^{n+1}}=\frac{5\times5^{n+1}}{6\times6^n}=\frac{5}{6}\times\frac{5^{n+1}}{6^n}=\frac{5}{6}\times v_n$

إذن: $v_{n+1}=\frac{5}{6}v_n$ أي أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$

وحدّها الأول هو 5 $v_0=\frac{5^{0+1}}{6^0}=$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}}{6^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}5.\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ لأن $-1\prec\frac{5}{6}\prec1$

II-1)البرهان بالتراجع أن:$1\le u_n\le6$من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ يكون: $1\le u_0\le6$ محققة لأن $u_0=1$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_n\le6$

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\le u_{n+1}\le6$

لدينا: $1\le u_n\le6$ ومنه $5\le5u_n\le30$

ومنه$11\le5u_n+6\le36$ أي $\sqrt{11}\le\sqrt{5u_n+6}\le6$

أي $1\prec\sqrt{11}\le\sqrt{5u_n+6}\le6$ إذن: $1\le u_{n+1}\le6$

2)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{5u_n+6}-u_n$.

لمعرفة الإشارة نضرب ونقسم في مرافق الفرق نجد:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(\sqrt{5u_n+6}-u_n)(\sqrt{5u_n+6}+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

$$=\frac{-u_n^2+5u_n+6}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}=\frac{-(u_n+1)(u_n-6)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$$

بماأن$1\le u_n\le6$فإن الفرق يكون موجبا على هذا المجال

ومنه المتتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

3-أ)البرهان أن $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا $6-u_{n+1}=6-\sqrt{5u_n+6}=\frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$

لأن: $\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\frac{1}{6}$ ومنه $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$

ب)تبيان أن $0\le6-u_n\le v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

من أجل 0 نجد: $6-u_1\le\frac{5}{6}(6-u_0)$

من أجل 1 نجد: $6-u_2\le\frac{5}{6}(6-u_1)$

....

....

من أجل n نجد $6-u_n\le\frac{5}{6}(6-u_{n-1})$

بضرب هذه المتباينات طرف لطرف نجد:

$6-u_n\le\left(\frac{5}{6}\right)^n(6-u_0)$ أي $0\le6-u_n\le5\left(\frac{5}{6}\right)^n=v_n$

<u>طريقة2</u>: لدينا: $0\le6-u_n$

<u>البرهان بالتراجع على أن</u> $6-u_n\le v_n$

من أجل $n=0$يكون: $6-u_0\le v_0$محققة لأن $5\le5$

نفرض أن $6-u_n\le v_n$ ونبرهن $6-u_{n+1}\le v_{n+1}$

لدينا: $6-u_n\le v_n$ ومنه $5(6-u_n)\le5v_n$

ومنه $5(6-u_n)\le v_{n+1}$

ولدينا: $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$ومنه $6-u_{n+1}\le v_{n+1}$

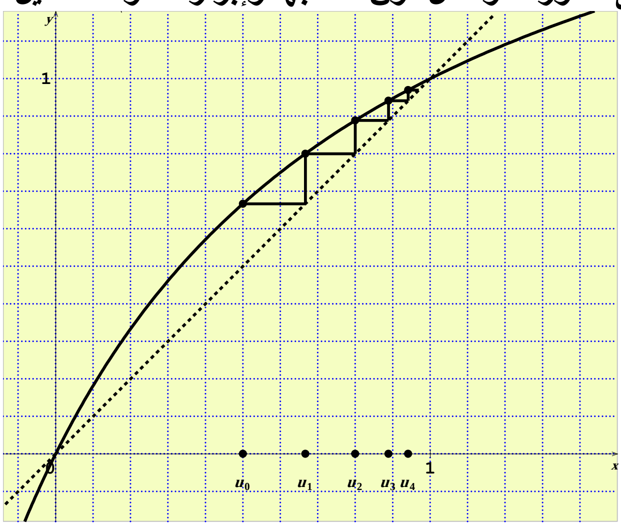
استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا: $0\le6-u_n\le v_n$ ولدينا ايضا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(6-u_n)=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$.

دورة2013 (الموضوع2)

1-أ) إعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها وإبراز خطوط التمثيل



ب)وضع تخمين حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

من البيان نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2-أ)إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ معناه $f'(x)\succ 0$

لدينا: $f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\succ 0$

ب)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 1$

من أجل $n=0$ يكون: $0\prec u_0\prec 1$ محققة لأن $u_0=\frac{1}{2}$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 1$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_{n+1}\prec 1$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 1$

ومنه: $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$ لأن الدالة f متزايدة تماما

أي: $0\prec u_{n+1}\prec 1$ لأن $f(0)=0$ و $f(1)=1$

ج)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n}{u_n+1}=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط لأن المقام موجب تماما

من أجل كل $u_n\in]0;1[$ يكون $u_n(1-u_n)\succ 0$

وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3-أ)البرهان أن (v_n) م.هـ أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب حدّها الأول

(v_n) م هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{f(u_n)-1}{f(u_n)}=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{u_n-1}{2u_n}$$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{2}.\frac{u_n-1}{u_n}$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

الحد الأول هو: $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=-1$

حساب نهاية (u_n)

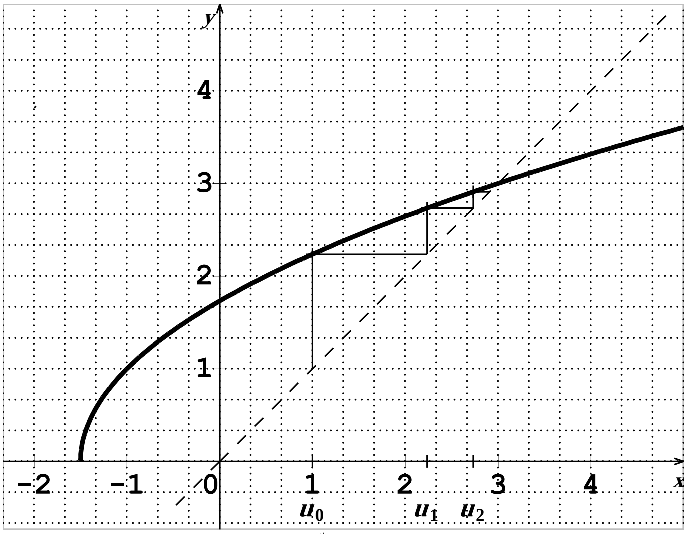
لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{1-v_n}$

ولدينا: $v_n=v_0.q^n=-1.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $u_n=\frac{1}{1+2^{-n}}$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+2^{-n}}=1$ أي إي $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

دورة2012 (الموضوع1)

1-أ)اعادة رسم الشكل وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



ب)وضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

من 1-أ)نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 3

2)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 3$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $0\prec u_0\prec 3$ محققة لأن $u_0=1$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 3$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_{n+1}\prec 3$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 3$

ومنه: $h(0)\prec h(u_n)\prec h(3)$ لأن الدالة h متزايدة تماما

أي: $\sqrt{3}\prec u_{n+1}\prec 3$ إذن $0\prec u_{n+1}\prec 3$.

3-أ)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير (u_n) ندرس اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

اشارة الفرق هي حسب اشارة البسط لأن المقام موجب

$-u_n^2+2u_n+3=0$ معناه $u_n=-1$ أو $u_n=3$

ومنه : $-u_n^2+2u_n+3\succ 0$ من أجل $0\prec u_n\prec 3$

وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

طريقة2: لدينا الدالة المرفقة h متزايدة تماما و $u_1\succ u_0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب)استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب $\lim_{x\to+\infty}u_n$

المتتالية (u_n) متقاربة لإنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n\prec 3)$.

نفرض أن: $\lim_{x\to+\infty}u_n=\alpha$ ونحل المعادلة $h(\alpha)=\alpha$

$h(\alpha)=\alpha$ معناه $\sqrt{2\alpha+3}=\alpha$

معناه $2\alpha+3=\alpha^2$ لأن α معناه موجب تماما

معناه $\alpha=3$ أو $\alpha=-1$ مرفوض

دورة2012 (الموضوع2)

1)البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 3 \prec u_n \prec 4$

من أجل $n=0$ يكون: $3 \prec u_0 \prec 4$ محققة لأن $u_0 = \frac{13}{4}$

نفرض أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 3 \prec u_n \prec 4$ صحيحة

ونبرهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 3 \prec u_{n+1} \prec 4$ صحيحة

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 3 \prec u_n \prec 4$

ومنه: $0 \prec u_n - 3 \prec 1$ أي $0 \prec \sqrt{u_n - 3} \prec 1$

أي: $3 \prec 3 + \sqrt{u_n - 3} \prec 4$ إذن $3 \prec u_{n+1} \prec 4$.

2)تبيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 3} + 3 - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$

وذلك بعد الضرب والقسمة في المرافق $\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما

إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ هي حسب إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$

لدينا $-u_n^2 + 7u_n - 12$ ينعدم عند 3 و 4

ومن أجل $3 \prec u_n \prec 4$ يكون $-u_n^2 + 7u_n - 12 \succ 0$

وعليه تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) تبرير أن المتتالية متقاربة.

من الجواب السابق المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وعليه تكون المتتالية متقاربة نحو 4.

4-أ)البرهان أن (v_n) م.هـ أساسها $\frac{1}{2}$ وحساب الحد الأول

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

لدينا: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2} v_n$

الحد الأول هو $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\frac{1}{4}$

ب)كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا: $v_n = v_0.q^n = -\ln 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 3)$ ومنه $e^{v_n} = u_n - 3$

وعليه: $u_n = 3 + e^{v_n} = 3 + e^{-\ln 4.\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty}(3 + e^{-2\ln 2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}) = 3 + 1 = 4$

جـ) كتابة P_n بدلالة n وتبيان أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

لدينا: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times ...... \times (u_n - 3)$

ومنه $P_n = e^{v_0}.e^{v_1}.......e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + ... + v_n} = e^{v_0 \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)}}$

ومنه: $\ln P_n = \ln\frac{1}{16}(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1})$. $P_n = e^{\ln\frac{1}{16}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty} P_n = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\frac{1}{16}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = e^{\ln\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$$

دورة2011 (الموضوع1)

تحديدالإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة مع التعليل

الإقتراح	الإجابة ص	التعليل
1	ب-هندسية	$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n$
2	النهايةهي: $-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty}(v_n - \frac{1}{2})$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}.3^n - \frac{1}{2}) = -\infty$
3	المجموع S_n هو	$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n\right]$ $= -\frac{1}{2}\left[1.\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right] = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

دورة2011 (الموضوع2)

1-أ) بيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها α

(v_n) هندسية أساسها α معناه $v_{n+1} = \alpha.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$ و $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha(u_n + \frac{1}{\alpha - 1}) = \alpha v_n$$

ب) كتابة v_n بدلالة n و α واستنتاج u_n بدلالة n و α

لدينا: $v_n = v_0.q^n$ حيث $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1}$

ومنه: $v_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha - 1}\right).\alpha^n = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n}{\alpha - 1}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$ ومنه: $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1}$

ومنه $u_n = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha^{n+1} - 5\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$

جـ)تعيين قيم α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة

حتى تكون (u_n) متقاربة يجب أن يكون الأساس $0 \prec \alpha \prec 1$

2- حساب المجموعين S_n و T_n

$$S_n = v_0\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}\right) = 8\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right] = 16\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right)$$

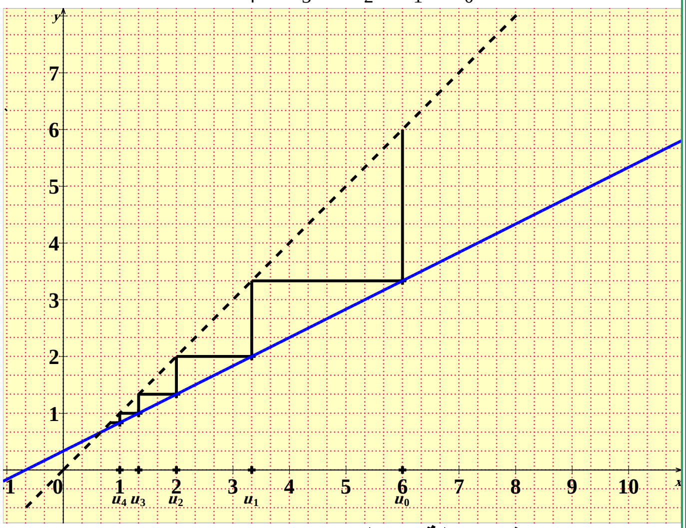
لدينا $T_n = u_0+u_1+.....+u_n$

نعلم أن $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}$ ومنه $u_n = v_n - 2$ وعليه:

$$T_n = (v_0-2)+(v_1-2)+.....+(v_n-2)$$
$$= (v_0+v_1+.....+v_n) - 2(n+1) = S_n - 2(n+1)$$

دورة 2010 (الموضوع 2)

1-أ)تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 وu_4 على محور الفواصل



ب)تعيين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و(D)

لتعيين إحداثي نقطة تقاطع (Δ) و(D) نحل الجملة التالية:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \\ y=x \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \\ y=x \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=x \end{cases}$$

ومنه إحداثي نقطة تقاطع (Δ) و(D) هي $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

حـ) إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من خلال التمثيل البياني نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة

2-أ)الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n \succ \frac{2}{3}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 \succ \frac{2}{3}$ محققة لأن $u_0=6$

نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\succ\frac{2}{3}$

ونبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}\succ\frac{2}{3}$

لدينا: $u_n\succ\frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n \succ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$

ومنه $\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3} \succ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ وأخيرا $u_{n+1}\succ\frac{2}{3}$

ب)استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)$

$u_{n+1}-u_n \prec 0$ لأن $u_n\succ\frac{2}{3}$

3-أ)تبيين أن (v_n) م هندسية وتحديد أساسها وحدّها الأول

(v_n) متتالية هندسية معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا: $v_n = u_n-\frac{2}{3}$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)$

إذن: $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ أي أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدّها الأول $v_0=u_0-\frac{2}{3}=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$

ب)كتابة عبارة الحد العام v_n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=v_0.q^n$ ومنه : $v_n=\frac{16}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه $u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{16}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

جـ)حساب المجموع S_n واستنتاج المجموع S'_n بدلالة n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+....+v_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$

ومنه: $S_n=\frac{16}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{32}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$S'_n=u_0+u_1+....+u_n$

$=\left(\frac{2}{3}+v_0\right)+\left(\frac{2}{3}+v_1\right)+....+\left(\frac{2}{3}+v_n\right)=\frac{2}{3}(n+1)+S_n$

دورة 2009 (الموضوع 1)

1) حساب v_0 و v_1

لدينا: $v_n=u_{n+1}-u_n$

ومنه: $v_0=u_1-u_0=1$ و $v_1=u_2-u_1=\frac{1}{3}$

2) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها

(v_n) متتالية هندسية معناه: $v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا: $v_n=u_{n+1}-u_n$

ومنه: $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\boxed{q=\frac{1}{3}}$

3-أ)حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+......+v_{n-1}$

ومنه: $S_n=v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

ب)البرهان أن: $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$ **من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $S_n=v_0+v_1+.......+v_{n-1}$

ومنه: $S_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+.......+(u_n-u_{n-1})$

بعد التبسيط نجد: $S_n=-u_0+u_n$

ومنه: $u_n=u_0+S_n$ وأخيرا: $\boxed{u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1}$

جـ) تبيين أن (u_n) متقاربة

(u_n) متقاربة معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ثابت

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{5}{2}$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

دورة2009 (الموضوع2)

1-أ)حساب u_2 والأساس q واستنتاج الحد الأول

لدينا: $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\ u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$ أي: $\begin{cases}\frac{u_2}{q}+2u_2+u_2q=32\\ u_2^3=216\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}1+2q+q^2=\frac{16}{3}q\\ u_2=6\end{cases}$ أي: $\begin{cases}q=3\vee q=\frac{1}{3}\\ u_2=6\end{cases}$

وبمأن المتتالية متزايدة فإن: q=3 و $u_2=6$

لدينا: $u_2=u_1q$ ومنه : $u_1=\frac{u_2}{q}=\frac{6}{3}=2$

ب)كتابة عبا رة الحد u_n بدلالة n

لدينا: $u_n=u_1q^{n-1}=2.3^{n-1}$

جـ) حسبا المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=u_1+u_2+....+u_{n-1}=u_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

ومنه: $S_n=2\left(\frac{3^n-1}{3-1}\right)=3^n-1$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n=728$

$S_n=728$ معناه $3^n-1=278$ أي: $3^n=279=3^6$ إذن: n=6

2-أ)حساب v_2 و v_3

لدينا: $w_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$ و $v_1=2$

ومنه: $v_2=\frac{3}{2}v_1+u_1=\frac{3}{2}(2)+2=5$

$$v_3=\frac{3}{2}v_2+u_2=\frac{3}{2}(5)+6=\frac{27}{2}$$

ب) تبيين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n$

لدينا: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ومنه $w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}$

$$w_{n+1}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$$

أي: $=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}w_n$

جـ)كتابة w_n بدلالة n واستنتاج v_n بدلالة n

لدينا: $w_n=w_1(q)^{n-1}$ و $w_1=\frac{v_1}{u_1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ومنه: $w_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

لدينا: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ومنه: $w_n+\frac{2}{3}=\frac{v_n}{u_n}$

أي: $v_n=u_n(w_n+\frac{2}{3})$ إذن: $v_n=2.3^{n-1}(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3})$

دورة2008 (الموضوع1)

1-أ)تبيين أن f متزايدة تماما على I

f معرفة على $I=[1 ، 2]$ حيث: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

f قابلة للإشتقاق على I حيث: $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}$

$f'(x)$ موجب تماما ومنه f متزايدة تماما على I .

ب)تبيين انه من اجل كل x من I فإن f(x) تنتمي لـ I

بمأن f مستمرة ومتزايدة تماما على I فإن:

$1\le x\le 2$ ومنه $f(1)\le f(x)\le f(2)$ ومنه f(x) تنتمي لـ I .

2-أ)البرهان بالتراجع انه من اجل كلn من N، $1\le u_n\le 2$

من أجل n=0 يكون لدينا: $1\le u_0\le 2$ محققة

نفرض صحة P(n) أي $1\le u_n\le 2$

ونبرهن صحة P(n+1) أي $1\le u_{n+1}\le 2$

لدينا: $1\le u_n\le 2$ معناه $3\le u_n+2\le 4$ ....(1)

$1\le u_n\le 2$ معناه $2\le -u_n+4\le 3$ ....(2)

من (1) و(2) نجد: $1\le \frac{u_n+2}{-u_n+4}\le 2$

ومنه P(n) محققة من اجل كل عدد طبيعي n.

ب)دراسة تغيرات المتتالية(u_n).

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n^2-4u_n+2}{-u_n+4}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-4u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$$

البسط سالب تماما لأن $1\le u_n\le 2$

والمقام موجب تماما لأن $2\le -u_n+4\le 3$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على I.

استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

(u_n) متناقصة تماماعلى I ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

3-**البرهان بالتراجع انه من اجل كلn من N** $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

n=0 يكون لدينا: $u_0=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}=\frac{3}{2}$ محققة

نفرض صحة P(n) أي $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ونبرهن صحة P(n+1) أي $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

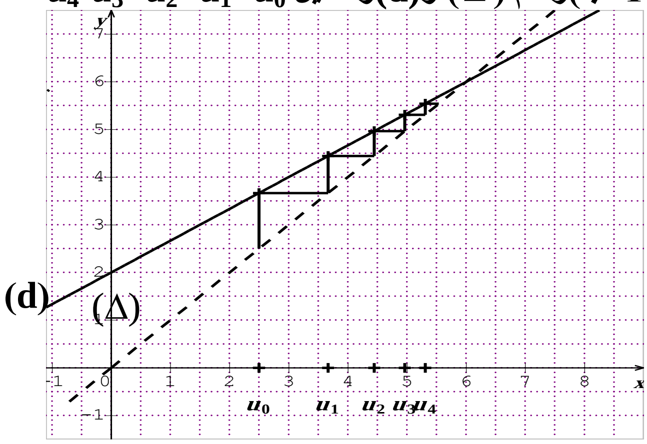
لدينا: $u_{n+1}=-1+\frac{6}{4-u_n}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

ب)تعيين النهاية : $\lim_{n\to+\infty}u_n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

دورة2008 (الموضوع2)

1أ-ب)رسم (Δ) و(d) وتمثيل u_0، u_1، u_2، u_3، u_4



جـ)وضع تخمين حول اتجاه تغير(u_n)، وتقاربها

من الرسم السابق نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 6.

2-أ)البرهان بالتراجع انه من اجل كلn من N، $u_n\le 6$

من أجل n=0 يكون لدينا: $u_0=\frac{5}{2}\le 6$ محققة

نفرض صحة P(n) أي $u_n\le 6$

ونبرهن صحة P(n+1) أي $u_{n+1}\le 6$

لدينا: $u_n\le 6$ معناه $\frac{2}{3}u_n\le 4$ معناه $\frac{2}{3}u_n+2\le 6$

أي أن $u_{n+1}\le 6$ ومنه $u_n\le 6$ محققة من أجل كل n من N

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n=-\frac{1}{3}(u_n-6)$$

بمأن $u_n\le 6$ فإن $-\frac{1}{3}(u_n-6)\succ 0$ أي (u_n) متزايدة تماما

جـ) دراسة تقارب (u_n)

المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6 لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 حسب ما سبق.

3-أ) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

(v_n) متتالية هندسية معناه: $v_{n+1}=v_n.q$

$v_n=u_n-6$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{2}{3}u_n+2-6=\frac{2}{3}(u_n-6)$

أي أن : $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

وحدها الأول $v_0=-\frac{7}{2}$

ب) كتابة عبارة u_n بدلالة n ، واستنتاج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

لدينا:$v_n=u_n-6$ و ومنه $u_n=v_n+6$

أي: $u_n=-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+6$ ، $\lim_{n\to+\infty}u_n=6$

الأستاذ: بالعبيدي محمّد العربي larbibelabidi@gmail.com