بكالوريات شعبة علوم تجريبية

دورة 2013 (الموضوع1)

1) التحقق أن $-2-3i$ هو حلا للمعادلة (E)

لدينا: $(E)\quad z^2+4z+13=0$

$z_1=-2-3i$ حلا للمعادلة (E) معناه $z_1^2+4z_1+13=0$

لدينا: $(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4-9+12i-8-12i+13=0$

إيجاد الحل الآخر

المعادلة (E) معاملاتها حقيقية و $\Delta'=b'^2-ac=-9$ أي $\Delta'\prec 0$

ومنه: $z_2=\overline{z_1}=-2+3i$

2-أ) تبيان أن $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

لدينا: S تشابه مركزه A ويحول $M(z)$ إلى $M'(z')$

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z'=az+(1-a)z_A$

حيث: $a=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{1}{2}i$ و $z_A=-2-3i$

ومنه: $z'=\frac{1}{2}iz+(1-\frac{1}{2}i)(-2-3i)=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

ب) حساب z_C لاحقة النقطة C .

لدينا: C صورة النقطة B بالتشابه S

ومنه: $z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$

3-أ) تبيّان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب حسابهما

D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين معناه وجود عددين حقيقيين α و β حيث: $\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

النقطة D تحقق العلاقة الشعاعية $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}...(1)$

ومنه: (1) تكافئ $-2\overrightarrow{DA}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})=\vec{0}$

تكافئ $-2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

تكافئ $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ أي أن: $\alpha=-3$ و $\beta=1$

الخلاصة: D مرجح النقطتين A و B المرفقين بمعاملين -3 و 1 على الترتيب.

ب) حساب z_D لاحقة النقطة D

لدينا: D مرجح الجملة $\{(A;-3),(B;1)\}$

ومنه: $z_D=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}=\frac{-3(-2-3i)+1(i)}{-3+1}=-3-5i$

جـ) تبيان أن $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD

لدينا: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{(-3-5i)-(-2-3i)}{(-4-2i)-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=i$

طبيعة المثلث ACD

لدينا: $\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ تعني $AD=AC$ ......(1)

$\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ تعني $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ ......(2)

من (1) و (2) نجد: المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين

دورة 2013 (الموضوع2)

1) حل المعادلة (1) في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0.....(1)$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$

$\Delta'=b'^2-ac=(2\cos\alpha)^2-4=4\cos^2\alpha-4$

$\Delta'=4\cos^2\alpha-4=-4(1-\cos^2\alpha)=(2i\sin\alpha)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما:

$z_1=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{2\cos\alpha-2i\sin\alpha}{1}=2(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

$z_2=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{2\cos\alpha+2i\sin\alpha}{1}=2(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

2) تبيّان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ يكون: $z''=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و $z'=2e^{\frac{\pi}{3}i}$

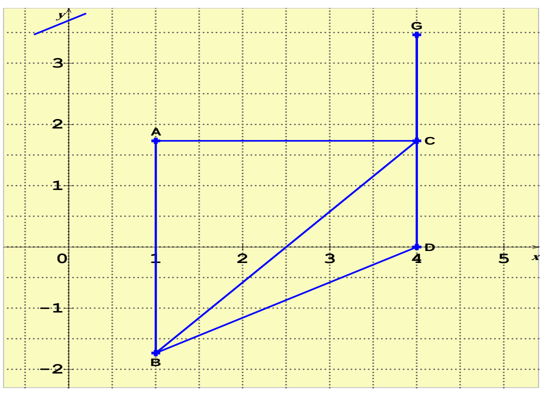
ومنه: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{2013}=e^{\frac{4026\pi}{3}i}=e^{0i}=1$

2-أ) إنشاء النقط A ، B و C .

لإنشاء النقطتين A ، B يمكن استعمال الإحداثيات القطبية

لدينا: $z_A=1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، $z_A=1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$z_C=4+\mathrm{Im}(z_A)$ و $z_G=4+2\mathrm{Im}(z_A)$



ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وتعيين نسبته وزاويته.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .....(*)

(*) تكافئ $(z_C - z_A) = \frac{i\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$

المساواة الأخيرة تعني أن C هي صورة B بالتشابه المباشر

الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

جـ) تعيّن لاحقة النقطة G وانشاءها

لدينا: G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$

ومنه: $z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = 4 + 2i\sqrt{3}$

د) تعيين z_D لاحقة D بحيث يكون ABDG متوازي أضلاع

ABDG متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$ معناه $z_D - z_G = z_B - z_A$

معناه $z_D = z_G + z_B - z_A = 4$

دورة 2012 (الموضوع2)

1-أ) التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

لدينا: $P(6) = 6^3 - 12(6)^2 + 48(6) - 72 = 0$

ومنه 6 هو جذرا لكثير الحدود $P(z)$

ب) إيجاد العددين الحقيقيين α و β.

لدينا: $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

ومنه: $P(z) = z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta$...(1)

ولدينا: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$...(2)

بالمطابقة بين الشكلين (1) و(2) نجد:

$\alpha - 6 = -12$ ومنه $\alpha = -6$ و $-6\beta = -72$ ومنه $\beta = 12$

وعليه يكون: $P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)$

جـ) حل المعادلة $P(z) = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

$P(z) = 0$ معناه $(z-6)(z^2 - 6z + 12) = 0$

معناه $(z-6) = 0$ أو $(z^2 - 6z + 12) = 0$

معناه $z = 6$ أو $(z^2 - 6z + 12) = 0$...(*)

نحل المعادلة (*) باستعمال المميز المختصر

لدينا: $\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - (1)(12) = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

المعادلة (*) تقبل حلّين مترافقين هما:

$z' = 3 - \sqrt{3}i$ و $z'' = 3 + \sqrt{3}i$

2-أ) كتابة كلّ من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

لدينا: $z_A = 6 = 6(1 + 0i) = 6e^{0i}$

$z_B = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_C = \overline{z_B} = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - 3 - \sqrt{3}i}{6 - 3 + \sqrt{3}i} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{3 + \sqrt{3}i}$

$= \frac{(3 - \sqrt{3}i)^2}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسي

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1e^{-\frac{\pi}{3}i}$

جـ) استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا من الجواب السابق:

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1$ معناه $AB = AC$

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ معناه $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3-أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S

العبارة المركبة للتشابه هي: $z' = az + (1-a)z_C$

حيث: $a = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} = i\sqrt{3}$

ومنه : $z' = i\sqrt{3}z + (1 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}z - i4\sqrt{3}$

ب) تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة 'A صورة A بالتشابه S

لدينا: $z' = i\sqrt{3}z - i4\sqrt{3}$

ومنه : $z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - i4\sqrt{3} = i\sqrt{3}(6) - i4\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$

جـ) تبيان أن النقط A ،B و 'A في استقامية .

النقط A ، B و 'A في استقامية معناه $z_{\overrightarrow{A'B}} = kz_{\overrightarrow{AB}}$

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3 + i\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{A'B}} = z_B - z_{A'} = 3 - i\sqrt{3} = -z_{\overrightarrow{AB}}$

دورة 2011 (الموضوع1)

1-أ-كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + i + i}{2 + 3i + i} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = \frac{20i}{20} = i$$

ب-تعيين طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

نستنتج مما سبق أن : $AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

2-أ)تعيّين طبيعة التحويل T وتحديد عناصره المميزة

من العبارة المركبة للتحويل T لدينا: $a = i$ و $b = -1 - i$

التحويل T دوران لأن $|a| = 1$

العناصر المميزة هي الزاوية $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$ والمركز هو A

لأن: $z_A = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{2} = -i$

ب- تعيين صورة النقطة B بالتحويل T

لدينا: $z'_B = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = -4 + i$

ومنه صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C

3-أ) بيان أن النقط A، B وD في استقامية

النقط A، B وD في استقامية معناه $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6+3i}{-4+2i} = \frac{(-6+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{3}{2}$$

ب)تعيين نسبة التحاكي h

العبارة المختصرة المركبة للتحاكي h هي:

$z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ حيث k هي نسبة التحاكي h

ومنه : $k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$

ب)تعيين العناصر المميزة للتشابه S

العبارة المختصرة المركبة للتشابه S هي:

$z_D - z_A = a(z_B - z_A)$ حيث عدد مركب و $a = [r;\theta]$

$$a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{(-6+3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{30i}{20} = 3i$$

ومنه نسبة التشابه S هي $|a| = 3$ وزاوية هي $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$

دورة2010 (الموضوع1)

1)كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

لدينا: $z_A = 1 + i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z_B = 3i = 3(0 + i) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$

2) أ)تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z' = 2iz + 6 + 3i$

وهي من الشكل $z' = az + b$ حيث:

$a = 2i$ و $b = 6 + 3i$

ومنه : نسبة التشابه S هي $|a| = 2$ وزاويته $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة ذات اللاحقة z_0 حيث:

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15i}{5} = 3i$$

ومنه المركز هو النقطة B

ب)تعيين z_C لاحقة النقطة C صورةالنقطة A بالتشابه S

لدينا: $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$
$= 2i(1+i) + 6 + 3i = 4 + 5i$

جـ)استنتاج طبيعة المثلث ABC

زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$ المركز هو B أي: $ABC = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في B.

3-أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D

لدينا: $z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2 - 2 + 2}$

ومنه: $z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2 - 2 + 2} = 5 + 3i$

ب)تعيين طبيعة الرباعي ABCD

الرباعي ABCD مستطيل لأن:

$z_{\overrightarrow{AD}}(4+2i) = z_{\overrightarrow{BC}}(4+2i)$ والمثلث ABC قائم في B

4-أ) التحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ)

E تنتمي إلى (Δ) معناه $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ عددا حقيقيا موجبا تماما

$$\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i} = 6 \in \mathbb{R}_+^*$$

ب) إعطاء تفسيرا هندسيا لعمدة $\frac{z_B - z}{z_D - z}$

نعلم أن: $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})$

ومنه: $\frac{z_B - z}{z_D - z} \in \mathbb{R}_+^*$ معناه $(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$

معناه النقط A، B و M في استقامة

تعيين المجموعة (Δ)

بما أنه من أجل كل نقطة M من المستوي النقط A، B و M في استقامة والنقطة E تنتمي لـ(Δ) فإن مجموعة النقط $(\Delta) = (BD) - BD$.

دورة 2010 (الموضوع2)

1) حل المعادلة $z^2-6z+18=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

$\Delta' = b'^2 - ac = 3^2 - 18 = -9 = (3i)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما:

$$z'' = \frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{3+3i}{1} \quad ; \quad z' = \frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{3-3i}{1}$$

كتابة الحلين على الشكل الاسي

$$z' = 3-3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z'' = 3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2-أ) تبيين أن A، B، C و D تنتمي للدائرة ذات المركز O

لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$

ومنه: $OA = OB = OC = OD = 3\sqrt{2}$

ب) تعيين زاوية الدوران R

لدينا: $z_B - z_O = a(z_A - z_O)$ أي $z_B = az_A$

ومنه: $a = \dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\overline{z_A}}{z_A} = \dfrac{(\overline{z_A})^2}{z_A.\overline{z_A}} = -i$

ومنه زاوية الدوران هي

$$\arg(a) = \arg(-i) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ .$$

جـ) تبيين أن النقط A، O، C في استقامية وكذلك النقط B، O و D

النقط A، O، C في استقامية لأن $z_A = -z_C$ (متناظرتان بالنسبة للمبدأ O)

النقط B، O، D في استقامية لأن $z_D = -z_B$ (متناظرتان بالنسبة للمبدأ O)

د) استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

الرباعي $ABCD$ مربع لأن :

*القطران $[AC]$، $[BD]$ لهما نفس المنتصف المبدأ O من الجواب السابق

*ولأن: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}.\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} = 0$ و $AC = BD$

دورة 2008 (الموضوع2)

1-أ) ايجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $7+24i$

ليكن δ جذرا تربيعيا للعدد المركب $7+24i$ حيث $\delta = x+iy$

لدينا: $\delta^2 = 7+24i$ تكافئ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 ...(1) \\ x^2 + y^2 = |7+24i| = 25 ...(2) \\ 2xy = 24 .....(3) \end{cases}$

من (1) و(2) نجد: $2x^2 = 32$ وعليه: $x = 4$ أو $x = -4$

بتعويض $x = 4$ في (3) نجد: $y = 3$ أي $\delta = 4+3i$

بتعويض $x = -4$ في (3) نجد: $y = -3$ أي $\delta = -4-3i$

ب) تبيّن أن: $z^2 + iz - 2 - 6i = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{7+24i}{4}$

لدينا: $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2 - \frac{7+24i}{4} = z^2 + iz - \frac{1}{4} - \frac{7}{4} - 6i = z^2 + iz - 2 - 6i$

جـ) استنتاج z_1 و z_2 حلّي المعادلة: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$ تكافئ $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2 - \frac{7+24i}{4} = 0$

$\left(z+\frac{i}{2}\right)^2 - \frac{7+24i}{4} = 0$ تكافئ $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2 = \left(\frac{4+3i}{2}\right)^2$

$\left(z+\frac{i}{2}\right)^2 = \left(\frac{4+3i}{2}\right)^2$ تكافئ $\left(z+\frac{i}{2}\right) = \left(\frac{4+3i}{2}\right)$ أو $\left(z+\frac{i}{2}\right) = -\left(\frac{4+3i}{2}\right)$

ومنه حلّي المعادلة هما: $z_1 = \dfrac{-i+3i+4}{2} = 2+i$

$$z_2 = \frac{-i-3i-4}{2} = -2-2i$$

2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ)

الدائرة (Γ) مركزها ω منتصف القطعة $[AB]$

ومنه: $z_\omega = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{(2+i)+(-2-2i)}{2} = -\dfrac{1}{2}i$

3) كتابة z_C على الشكل الجبري

لدينا: $z_C = \dfrac{4-i}{1+i} = \dfrac{(4-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{3-5i}{2}$

اثبات ان النقطة C تنتمي للدائرة (Γ)

C تنتمي للدائرة (Γ) معناه $\omega C = 2AB$

لدينا: $\omega C = |z_c - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \frac{5}{2}$

$AB = |z_B - z_A| = |4-3i| = 5$

ومنه: $\omega C = 2AB$

4-أ) البرهان ان عبارة التشابة S هي:

$$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$$

لدينا: $S(z_0) = z_0$ معناه $z_0 = ke^{i\theta}z_0 + b ....(1)$

$S(z) = z$ معناه $z' = ke^{i\theta}z + b ....(2)$

بطرح (2) من (1) نجد: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

ب) تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S

لدينا S معرف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

التحويل S هو تشابه مباشر لأن $k=2$ مركزه النقطة ω ذات الاحقة $z_\omega = -\frac{1}{2}i$ ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

الأستاذ: بالعبيدي محمّد العربي larbibelabidi@gmail.com