ملاحظة:حلول التمارين الواردة في هذه السلسلة خاصة بالتمارين غير المتعلقة بالتحويلات النقطية وسوف نوافيكم بحلول بقية التمارين في السلسلة 07

بكالوريات شعبة علوم تجريبية

دورة2012 (الموضوع1)

1) حل المعادلة في المجموعة $\mathbb{C}$.

لدينا: $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ومنه $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$

ومنه: $z^2-2z+3iz=3iz-6$ أي: $z^2-2z+6=0$

لحل المعادلة $z^2-2z+6=0$ نستعمل المميز $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-2)^2-4(1)(6)=-20=(2\sqrt{5}i)^2$

وعليه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما:

$z'=1-\sqrt{5}i$ و $z'=1+\sqrt{5}i$

2)التحقق أن A،B تنتميان إلى دائرة واحدة مركزها O وتعيين نصف قطرها.

لدينا: $|z_A|=|z_B|=\sqrt{6}$ أي $OA=OB=\sqrt{6}$

ومنه A ،B تنتميان إلى دائرة واحدة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$

3)التعبيرعن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM

لدينا $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z'=\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}$

ومنه $|z'|=\left|\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}\right|$

لكن $|z'|=OM'$ و $\left|\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}\right|=\dfrac{3CM}{DM}$

ومنه : $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$.

ب-استنتاج أنه من أجل كل نقطة $M\in(\Delta)$ فإن النقطة M' تنتمي لدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$ ومنه $OM'=3$ لأن $CM=DM$

من العلاقة $OM'=3$ نستنتج أن M' تنتمي للدائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3.

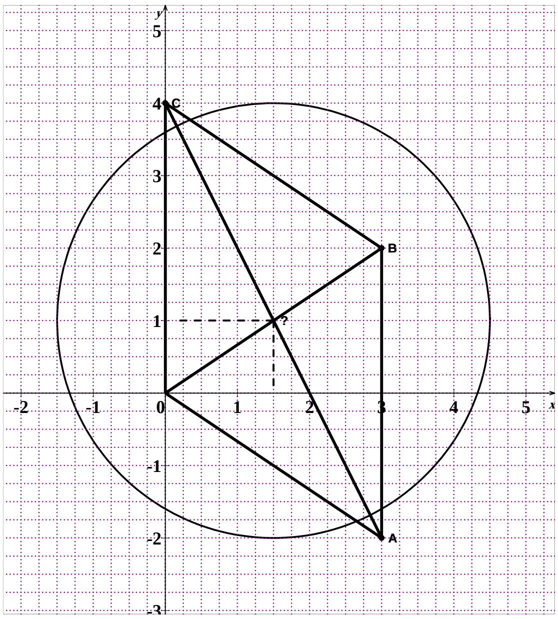
التحقق ان النقطة E تنتمي إلى (γ)

E تنتمي إلى (γ) معناه $OE=3$

لدينا: $OE=|z_E|=|3i|=3$.

دورة2011 (الموضوع2)

1.أ) تعليم النقط A ، B و C



ب) تعيين طبيعة الرباعي OABC مع التعليل

الرباعي OABC متوازي أضلاع لأن :

$\overrightarrow{OC}(z_C-z_O)=\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$ أي $\overrightarrow{OC}(4i)=\overrightarrow{AB}(4i)$

جـ) تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC

النقطة Ω هي نقطة منتصف القطرين $[AC]$ و $[OB]$

لاحقة Ω هي: $z_\Omega=\dfrac{z_O+z_B}{2}=\dfrac{0+3+2i}{2}=\dfrac{3}{2}+i$

2)تعيين وإنشاء مجموعة النقط (E)

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.......(*)

(*) تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ لأن Ω مركز الرباعي OABC

(*) تكافئ $\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\|=3$ وعليه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها3

ملاحظة: إنشاء (E) في الشكل السابق

3-أ) حل المعادلة $z^2-6z+13=0$ في $\mathbb{C}$

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر: $\Delta'=b'^2-ac$

لدينا: $\Delta'=(-3)^2-(1)(13)=-4$ أي $\Delta'=(2i)^2$

ومنه حلي المعادلة هما: $z_0=1-2i$ ، $z_1=1+2i$

ب)تعيين مجموعة مجموعة النقط M من المستوي

لدينا: $|z-z_0|=|z-z_1|$ تكافئ $MA=MB$

حيث M صورة z ، A صورة z_0 و B صورة z_1

مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

لأن العددان z_0 و z_1 مترافقان.

دورة2009 (الموضوع1)

1) حل المعادلة $z^2-2z+4=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لحل هده المعادلة نستعمل المميز المختصر: $\Delta'=b'^2-ac$

لدينا: $\Delta'=(-)^2-(1)(4)=-3$ أي $\Delta'=(\sqrt{3}i)^2$

ومنه حلي المعادلة (e) هما:

$$z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad ، \quad z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

2- أ) كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي

لدينا: $z_1=1-\sqrt{3}i=2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$z_2=1+\sqrt{3}i=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) حساب الأطوال AB ، AC ، BC

لدينا: $AB=|z_A-z_B|=|-2\sqrt{3}i|=2\sqrt{3}$

$$AC=|z_A-z_C|=|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i|=3$$

$$BC=|z_C-z_B|=|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i|=\sqrt{3}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $AB^2=12$ و $BC^2+AC^2=9+3=12$

ومنه المثلث ABC قائم في C لأن: $BC^2+AC^2=AB^2$

جـ) ايجاد طويلة وعمدة للعدد المركب Z

لدينا: $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

ومنه: $|Z|=\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\arg(z_C-z_B)-\arg(z_A-z_B)+2k\pi$$

$$\arg(Z)=\arg(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)-\arg(-2\sqrt{3}i)+2k\pi$$

$$\arg(Z)=(-\frac{\pi}{6})-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

د) حساب Z^3 و Z^6 واستنتاج أن Z^{3K} عدد حقيقي

لدينا: $|Z|=\frac{1}{2}$ و $\arg(Z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي: $Z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه: $Z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$

$$Z^6=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}=\frac{1}{64}e^{i2\pi}=\frac{1}{64}$$

$$Z^{3k}=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3k}=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3k\pi}{3}}=\frac{1}{8^k}e^{ik\pi}$$

نميز حالتين هما:

إذا كان k عدد طبيعي زوجي فإن: $Z^{3k}=\frac{1}{8^k}e^{ik\pi}=\frac{1}{8^k}$

إذا كان k عدد طبيعي فردي فإن: $Z^{3k}=\frac{1}{8^k}e^{ik\pi}=-\frac{1}{8^k}$

وفي الحالتين العدد Z^{3k} هو عدد حقيقي

دورة2009 (الموضوع2)

) حل المعادلة $p(z)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $p(z)=0$ معناه: $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$

معناه: $(z-1-i)0$ ($4z$ 2 z

ومنه: $(z-1-i)=0$ أي: $z=1+i$

$$(z^2-2z+4)=0 \;....(e)$$

لحل المعادلة (e) نستعمل المميز المختصر: $\Delta'=b'^2-ac$

لدينا: $\Delta'=(-)^2-(1)(4)=-3$ أي $\Delta'=(\sqrt{3}i)^2$

ومنه حلي المعادلة (e) هما:

$$z'=\frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad ، \quad z''=\frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

ومنه حلول المعادلة $p(z)=0$ هي:

$$z=1+i \;،\; z=1+\sqrt{3}i \;،\; z=1-\sqrt{3}i$$

2- أ) كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي

لدينا: $z_1=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_2=1-\sqrt{3}i=2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري والأسي

<u>الشكل الجيري:</u>

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$ بضرب حديه في مرافق المقام

وبعد الحسابات نجد:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{4}=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

<u>الشكل الأسي:</u>

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

جـ)استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

من الجواب السابق لدينا:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).....(1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}......(2)$$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و(2) نجد:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

ومنه: $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3-أ) تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i(\frac{7n\pi}{12})}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{7n\pi}{12}+i\sin\frac{7n\pi}{12}\right)$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا معناه $\sin\frac{7n\pi}{12}=0$ ومنه: $n=12k\ (k\in\mathbb{Z})$

ب) حساب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

حسب دستور موافر لدينا:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{7(456)\pi}{12}+i\sin\frac{7(456)\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos 0+i\sin 0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}$$

لأن: $\frac{7(456)\pi}{12}=266\pi=(133)2\pi+0$

دورة2008 بتصرف(الموضوع1)

1-حل المعادلة التالية في C $z^2-2z+2=0$

لدينا: $\Delta'=(-1)^2-(2)=-1=i^2$

ومنه حلي المعادلة هما:

$$z_1=\frac{1-i}{1}=1-i \text{ ، } z_2=\frac{1+i}{1}=1+i$$

تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{1-i}{2}\right)^{2008}$

$$\left(\frac{-2i}{2}\right)^{1004}=(-i)^{1004}=(-1)^{502}=1$$

2-أ)البرهان أن $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ ، $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

لدينا:

$$e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

$$=\frac{1}{\cos(-\theta)-i\sin(-\theta)}=\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=e^{\theta i}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=\frac{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)}$$

$$=(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)(\cos(\theta_2)-i\sin(\theta_2))$$

$$=(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))=e^{(\theta_1-\theta_2)i}$$

ب) كتابة العدد المركب Z على الشكل الأسي

لدينا: $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $AC=BC$

ومنه :المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

بكالوريات شعبة تقني رياضي

دورة2013 (الموضوع1)

1-حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$: $2z^2+6z+17=0$

نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'^2-ac=3^2-2.17=-25=(5i)^2$$

ومنه حلي المعادلة هما:

$$z'=\frac{-3-5i}{2} \text{ ، } z''=\frac{-3+5i}{2}$$

2- حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

لدينا: $z_A=-4$ ، $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

ومنه : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1+i}{1-i}=i$.

ومنه: $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

استنتج طبيعة المثلث ABC .

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ معناه $AB = AC$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

3-أ) تعيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E

الدينا : A منتصف القطعة $[EC]$ معناه $z_E = 2z_A - z_C$

A : منتصف القطعة $[BD]$ معناه $z_D = 2z_A - z_B$

وعليه : $z_E = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_D = -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i$

ب) تعيّين مجموعة النقط (Γ_1)

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 10\sqrt{2}....(1)$

لدينا: A مركز ثقل الرباعي $BCDE$

ومنه: (1) تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MA}\right\| = 10\sqrt{2}$ أي $AM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

إذن (Γ_1) هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

4- التحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)

B تنتمي إلى (Γ_2) معناه $\arg(z_B + 4) = \frac{\pi}{4}$

$\arg(z_B + 4) = \frac{5}{2}\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

تعيين مجموعة النقط (Γ_2)

لدينا: $\arg(z+4) = \frac{\pi}{4}$ تكافئ $\arg(z-(-4)) = \frac{\pi}{4}$

ومنه $\arg(z_M - z_A) = \frac{\pi}{4}$ معناه $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$

ومنه مجموعة النقط (Γ_2) هي : $M \in [AB) - \{A\}$

دورة2012 (الموضوع1)

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z : $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0...(1)$

المعادلة (1) تكافئ $\begin{cases}(z^2+2z+4)=0...(2)\\(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0....(3)\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}(z+1)^2=(i\sqrt{3})^2...(2)\\(z-\sqrt{3})^2=i^2....(3)\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}z_1=-1-i\sqrt{3};z_2=-1+i\sqrt{3}\\z_3=\sqrt{3}-i;z_4=\sqrt{3}+i\end{cases}$

2- أ-كتابة كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

$z_A = \sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_B = \overline{z_A} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$z_C = -1-i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$ و $z_D = \overline{z_C} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

ب-التحقق أن: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ **، ثم استنتج أن** $(AC)\perp(BD)$

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-(1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})} = \frac{-1+i}{1+i} = i$$

$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ معناه $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $(AC)\perp(BD)$

3- أ-كتابة كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري.

لدينا: $L_n = z_D \times z_n$ ومنه: $L_n = 2^{1-n}e^{\frac{2(n+1)\pi}{3}i}$

وعليه : $L_0 = 2^{1-0}e^{\frac{2(0+1)\pi}{3}i} = -1+\sqrt{3}i$

$L_1 = 2^{1-1}e^{\frac{2(1+1)\pi}{3}i} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب-أثبت أن (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

تذكير: (U_n) **معناه** $U_{n+1} = q.U_n$ **من أجل كل** $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $U_n = |L_n|$ ومنه $U_{n+1} = |L_{n+1}| = 2^{-(n+1)+1} = \frac{1}{2}.U_n$

(U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $U_0 = 2$

حساب المجموع S_n.

تذكير:مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية S_n حيث

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

لدينا: $S_n = \left\|\overrightarrow{OM_0}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$

ومنه: $S_n = U_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

اجاد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = 4$$

الأستاذ: بالعبيدي محمّد العربي larbibelabidi@gmail.com