I.عموميّات:

تنبيه: في كلّ ما يلي، يمثّل $D=[n_0,+\infty[$ مجالا من $\mathbb{N}$.

تعريف متتالية عدديّة:

نسمّي متتالية عدديّة $(u_n)_{n\geq n_0}$ كلّ دالّة معرّفة على D وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

اتّجاه تغيّر متتالية عدديّة:

I)الطّريقة العامّة:

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية عدديّة (u_n) ، نحسب- غالباً- المقدار: $u_{n+1}-u_n$ ، حيث نكون أمام ثلاثة احتمالات:

1.إذا كان $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متزايدة.

2.إذا كان $u_{n+1}-u_n\leq 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متناقصة.

3.إذا كان $u_{n+1}-u_n=0$ ، نستنتج أنّ (u_n) ثابتة.

II)حالة خاصّة:

إذا كانت المتتالية (u_n) **موجبة تماما** ، فيمكن لدراسة اتجاه تغيّرها، أن نحسب المقدار $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ و نكون أمام ثلاثة احتمالات:

1.إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\succ 1$ ، نستنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما.

2.إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\prec 1$ ، نستنتج أنّ (u_n) متناقصة تماما.

3.إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ، نستنتج أنّ (u_n) ثابتة.

III)استخدام الدّالة المرفقة:

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية عدديّة (u_n) معرّفة بحدّها الأوّل و بعلاقة تراجعيّة من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ ، يمكن دراسة إشارة المقدار $u_{n+1}-u_n$ كما في الحالة**I)** كما يمكن استخدام هذه النّظريّة (**غير المتداولة**) و ها هو نصّها:

إذا كانت (u_n) متتالية عدديّة معرّفة بحدّها الأوّل و بعلاقة تراجعيّة من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ ، فلدينا النتائج التّالية :

1.إذا كانت f متناقصة ، تكون (u_n) غير رتيبة.

2.إذا كانت f ثابتة (أيْ من الشكل $f(x)=a$) ، تكون في هذه الحالة المتتالية (u_n) مستقرّة أو ثابتة :

ا- (u_n) مستقرّة في حالة : $a\neq$الحدالأوّل.

بـ- (u_n) ثابتة في حالة : $a=$الحدالأوّل.

3.إذا كانت f متزايدة ، فإنّ اتجاه تغيّر (u_n) يتبع إشارة فارق الحدّيْن الأوّليْن؛ فمثلاً ، لو كانت (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ ، نجد :

∗ا- إذا كان $u_1-u_0\geq 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متزايدة.

∗بـ - إذا كان $u_1-u_0\leq 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متناقصة.

∗جـ -.إذا كان $u_1-u_0=0$ ، نستنتج أنّ (u_n) ثابتة.

نتائج تتعلّق بالمتتالية الثّابتة:

1.(u_n) متتالية عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$:

(u_n) ثابتة يعني : مهما كان n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=u_n=u_0$.

2.(u_n) متتالية عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}^*$:

(u_n) ثابتة يعني : مهما كان n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}=u_n=u_1$.

3.(u_n) متتالية عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$:

للبرهان بالتّراجع أنّ (u_n) ثابتة يمكن أنْ نبيّن أنّه:

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n=u_0$.

4.(u_n) متتالية عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}^*$:

للبرهان بالتّراجع أنّ (u_n) ثابتة يمكن أنْ نبيّن أنّه:

من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n=u_1$.

طرق إثبات أنّ المتتالية محدودة:

لإثبات أنّ متتالية $(u_n)_{n\in N}$محدودة من الأعلى بعدد حقيقي A أو من الأسفل بعدد حقيقي B ،يمكن اتّباع إحدى الطرق الآتية:

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq A$ أو $u_n\geq B$.
- المقارنة بين u_n و A أو u_n و B بدراسة إشارة u_n-A أو u_n-B.
- إذا كانت $u_n=f(n)$ ، ندرس تغيّرات f على $0;+\infty$.

تقارب أو تباعد متتالية:

لتكن (u_n) متتالية عدديّة معرّفة على $D=[n_0,+\infty[$.

1. نقول إنّ (u_n) متقاربة إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ؛ حيث $l\in\mathbb{R}$.

2. نقول إنّ (u_n) متباعدة إذا كان :

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ أو(غير موجودة) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3. نظريّة:

∗إذا كانت (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

∗إذا كانت (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة

4. حساب نهاية متتالية:

∗إذا كانت (u_n) معرّفة بحدّها العام u_n المعطى بدلالة n فتحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ باستخدام قواعد نهايات الدّوال المعروفة.

∗إذا كانت (u_n) معرّفة بحدّها الأوّل و بعلاقة تراجعيّة من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ ، فإذا كانت (u_n) متقاربة ، فتحسب نهايتها l بحلّ المعادلة $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)$ والتي تأخذ غالبا الشكل $\boxed{f(l)=l}$.

ملاحظة: في حالة قبول المعادلة $f(l)=l$ أكثر من حلّ نحتفظ بحلّ واحد، و نرفض الحلول الأخرى باعتبار المجال الذي تنتمي إليْه حدود المتتالية (u_n) أو باعتبار اتجاه تغيّرها.

اقلب الصّفحة...

II.المتتالية الحسابيّة:

1. كيف نثبت أنّ المتتالية (u_n) حسابيّة؟:

لإثبات أنّ المتتالية (u_n) حسابيّة ، نبيّن أنّ $\boxed{u_{n+1}-u_n=r}$
حيث r عدد حقيقي ثابت يسمّى أساس هذه المتتالية.

2. عبارة الحد العام:

إذا كانت (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ ، نحصل على $\boxed{u_n=u_0+n.r}$

إذا كانت (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ ، نجد $\boxed{u_n=u_1+(n-1).r}$

3. العلاقة بين حدّيْن كيفيّيْن:

$\boxed{u_n=u_p+(n-p).r}$ حيث n و p عددان طبيعيّان من D

4. حساب الأساس بمعرفة حدّيْن كيفيّيْن:

$\boxed{r=\dfrac{u_n-u_p}{n-p}}$ حيث n و p عددان طبيعيّان متمايزان من D

5. قانون الوسط الحسابي:

إذا كانت a ، b ، c حدودا متعاقبة من متتالية حسابيّة ، فإنّ :

$$\boxed{a+c=2b}$$

6. اتّجاه تغيّر متتالية حسابيّة:

اتجاه تغيّر متتالية حسابيّة (u_n) يتبع إشارة أساسها r :

1) إذا كان $r\succ 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متزايدة.
2) إذا كان $r\prec 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متناقصة.
3) إذا كان $r=0$ ، نستنتج أنّ (u_n) ثابتة.

7. حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابيّة:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير}\right)$$

II.المتتالية الهندسيّة:

1. كيف نثبت أنّ المتتالية (u_n) هندسيّة؟:

لإثبات أنّ المتتالية (u_n) هندسيّة ، نبيّن أنّ $\boxed{u_{n+1}=q\,u_{n+1}}$
حيث q عدد حقيقي ثابت يسمّى أساس هذه المتتالية.

2. عبارة الحد العام:

إذا كانت (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ ، نحصل على $\boxed{u_n=u_0.q^n}$

إذا كانت (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ ، نحصل على $\boxed{u_n=u_1.q^{n-1}}$

3. العلاقة بين حدّيْن كيفيّيْن:

$\boxed{u_n=u_p.q^{n-p}}$ حيث n و p عددان طبيعيّان من D و $q\neq 0$

4. قانون الوسط الهندسي:

إذا كانت a ، b ، c حدودا متعاقبة من متتالية هندسيّة ، فإنّ :

$$\boxed{a.c=b^2}$$

5. اتّجاه تغيّر متتالية هندسيّة:

نلخّص اتجاه تغيّر متتالية هندسيّة (u_n) أساسها q فيما يلي :

I) إذا كان حدّها الأوّل معدوما ، نستنتج أنّ (u_n) ثابتة.

II) إذا كان حدّها الأوّل غير معدوم ، نميّز ثلاث حالات:

1. إذا كان $q=0$ ، نستنتج أنّ (u_n) مستقرّة.
2. إذا كان $q\prec 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) غير رتيبة.
3. إذا كان $q\succ 0$ ، فاتجاه تغيّر (u_n) يتبع إشارة المقدار:

$\boxed{(q-1)\text{.الحدالأوّل}}$ ، بحيث :

∗إذا كان $(q-1)$.الحدالأوّل $\succ 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متزايدة.

∗إذا كان $(q-1)$.الحدالأوّل $\prec 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متناقصة

∗إذا كان $(q-1)$.الحدالأوّل $=0$ ، نستنتج أنّ (u_n) ثابتة.

☜ملاحظة: الحالتان2. و 3. هما الأكثر شيوعاً في تمارين المتتاليات الهندسيّة ، فينبغي التركيز عليهما.

6. حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسيّة:

نستعمل القانون الموالي :

$$S=\text{الحد الأول}\left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}}-1}{q-1}\right)\quad ;\ q\neq 1$$

كما يمكن استخدام القانون التّالي ، سواء بسواء :

$$S=\text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)\quad ;\ q\neq 1$$

ملاحظة1: إذا أردنا الحصول على عبارة المجموع بشكل أنسب فينبغي أن ننظر إلى q و الحد الأوّل ، فمثلا ، لو كان $q\prec 1$ و الحد الأوّل سالباً ، فيُفضّل استخدام القانون الأوّل و هكذا .

ملاحظة2: في حالة متتالية هندسيّة ثابتة،نستخدم القانون التالي:

$$S=\text{الحد الأول}\times\text{عدد الحدود}\quad ;\ q=1$$

7. قوانين النهايات المتعلّقة بالمتتاليات الهندسيّة :

ليكن q عددا حقيقيّا.

∗إذا كان $q\succ 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.

∗إذا كان $-1\prec q\prec 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$.

∗إذا كان $q\leq -1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n$ (غير موجودة) .

☜ملاحظة: تُستخدَم هذه القوانين لحساب النهايات في التمارين التي تتعرّض للمتتاليات الهندسيّة ، سواء تعلّق الأمر بالحدود العامّة أو المجاميع.

8. نتائج تتعلّق بالمتتاليات الهندسيّة :

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتيْن هندسيّتيْن أساساهما q و p وحدّاهما الأوّلان u_0 و v_0 على التّرتيب مع $v_n\neq 0$ ، فإنّ:

1) (u_nv_n) متتالية هندسيّة أساسها pq و حدّها الأوّل $u_0.v_0$.
2) $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ متتالية هندسيّة أساسها $\dfrac{p}{q}$ و حدّها الأوّل $\dfrac{u_0}{v_0}$.
3) (v_n^k) متتالية هندسيّة أساسها q^k و حدّها الأوّل v_0^k.
4) $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسيّة أساسها $\dfrac{1}{q}$ و حدّها الأوّل $\dfrac{1}{v_0}$.

-انتهى-

من إنجاز الأستاذ: محمّد جبالي