التصحيح النموذجي للفرض الأوّل للثلاثي الأوّل في مادة الرياضيّات

المستوى: 3 تقني رياضي　　　　أجري يوم: 2013/10/23　　　　المدة: 1 سا

الجواب الأوّل:

لدينا: $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{x}$　　　　$D_f = \mathbb{R}^*$

I). القراءات البيانية:

1/ **تعيين نهايات الدالة f وتفسيرها بيانيا:** (3 ن)

لدينا من الشكل:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ معناه أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل في جوار $-\infty$ مستقيما مقاربا مواز لمحور الفواصل معادلته $y=-2$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +2$ معناه أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل في جوار $+\infty$ مستقيما مقاربا مواز لمحور الفواصل معادلته $y=+2$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$ معناه أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مواز لمحور التراتيب معادلته $x=0$.

2/ **حساب** $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **وتعيين معادلة المماس عند النقطة** A :

لدينا: $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-2-(-3)}{-\dfrac{1}{2}-0} = -2$ (1 ن)

ومنه فإنّ معادلة المماس (T) عند النقطة $A\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ تكتب على الشكل:

$$(T): y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

معناه أنّ: $(T): y = -2x-3$ (1 ن)

II). 1/ **إثبات صحة المتراجحة:** (1 ن)

لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x :

$$\begin{cases} 4x^2-(4x^2+2x+1) &= -2x-1 \leq 0 \\ 4x^2+2x+1-(2x+1)^2 &= -2x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه فإنّ من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x

$$\begin{cases} 4x^2 &\leq (4x^2+2x+1) \\ 4x^2+2x+1 &\leq (2x+1)^2 \end{cases}$$

أي أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x : $4x^2 \leq (4x^2+2x+1) \leq (2x+1)^2$

2/ **استنتاج حصر لـ** $f(x)$: (1 ن)

لدينا من السؤال السابق: من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x : $4x^2 \leq (4x^2+2x+1) \leq (2x+1)^2$

معناه من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x : $\sqrt{4x^2} \leq \sqrt{(4x^2+2x+1)} \leq \sqrt{(2x+1)^2}$

الأستاذ: ريحان صلاح الدين

معناه من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x : $\frac{\sqrt{4x^2}}{x} \leq \frac{\sqrt{(4x^2+2x+1)}}{x} \leq \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{x}$

بما أنّ $x > 0$ فإنّ

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x \\ \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1| = 2x+1 \end{cases}$$

إذن: من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماما x : $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$

3/ **استنتاج** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: (1 ن)

لدينا من السؤال السابق: $2 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x}$ ومنه فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

الجواب الثاني:

لدينا: $g(x) = \frac{x^3+x^2-x+3}{(x+1)^2}$ $\quad D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

1/ **كتابة الدالة g بصيغة مكافئة:** (1 ن)

لدينا من أجل كلّ $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\begin{aligned} x - 1 + \frac{4}{(x+1)^2} &= \frac{(x-1)(x+1)^2+4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3+x^2-x+3}{(x+1)^2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

2/ **حساب نهايات الدالة g وتفسيرها بيانيا:** (3 ن)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{(x+1)^2} = -\infty$. معناه إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_g)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{(x+1)^2} = +\infty$. معناه إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_g)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-1} (x+1)^2 = 0$ إذن لحساب نهاية الدالة g عند -1 ندرس إشارة $(x+1)^2$. نعلم أنّ من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ إذن: $(x+1)^2 \geq 0$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = -2 + 4 \times +\infty = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g(x) = -2 + 4 \times +\infty = +\infty$. معناه $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا موازٍ لمحور التراتيب معادلته $x = -1$.

3/ **إثبات أنّ $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا:** (1 ن)

بما أنّ $g(x) = x - 1 + \frac{4}{(x+1)^2}$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{(x+1)^2} = 0$ فإنّ $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta) : y = x - 1$.

4/ **دراسة وضعية (Δ) بالنسبة إلى $(\mathscr{C}_g)$** : (1 ن)

لدينا $g(x) - y = \frac{4}{(x+1)^2} \geq 0$ من أجل كلّ $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ إذن فإنّ $(\mathscr{C}_g)$ يقع دوما فوق (Δ).

5/ حساب مشتقة الدالة g : (2 ن)

لدينا من أجل كلّ $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 4 \times \frac{(-2) \times (+1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+1)^3 - 2^3}{(x+1)^3} \\ &= \frac{((x+1)-2) \times ((x+1)^2 + 2 \times (x+1) + 2^2)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن نشر البسط فنحصل على $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ ثمّ نجري القسمة الإقليدية لهذا الأخير على العامل $(x-1)$ أو على العامل (x^2+4x+7).

6/ دراسة إتجاه تغيّر الدالة g : (2 ن)

لدينا: $g'(x) = 0$ معناه ($x - 1 = 0$ أو $x^2 + 4x + 7 = 0$ و $(x+1)^3 \neq 0$).
(المعادلة $x - 1 = 0$ معناه $x = +1$). و (المعادلة $x^2 + 4x + 7 = 0$ **لا** تقبل حلول) أما (المعادلة $(x+1)^3 \neq 0$ معناه $x \neq -1$). من جهة أخرى فإنّ إشارة g' هي من إشارة الجداء $(x-1)(x^2+4x+7)(x+1)$ ومنه

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+4x+7		$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

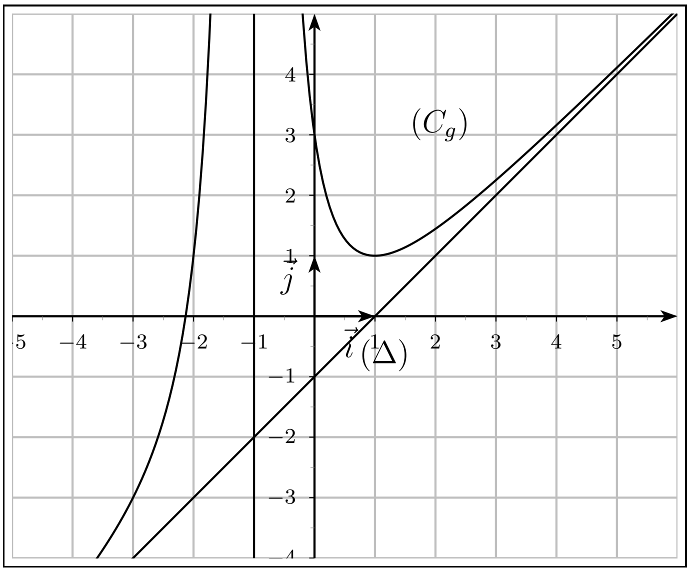
ومنه فإنّ جدول تغيرات الدالة g هو

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+1$	↗	$+\infty$

7/ **التمثيل البياني للدالة** g : (2 ن)

لدينا: $g(-2)=1$ و $g\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{31}{18}$ إذن:

$g\left(-\frac{5}{2}\right)\times g(-2)<0$ و g رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left]-\frac{5}{2};-2\right[$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]-\frac{5}{2};-2\right[$.



الأستاذ: ريحان صلاح الدين