الدوال العددية

دورة2009

I(1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ملاحظة: يمكن استنتاج هده النهايات من البيان

ب)تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		-	‖	-	
g(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4

2-أ) حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ب) التحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$ لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=0$$

جـ) دراسة تغيرات الدالة g

أتجاه التغير

لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x)=0$ معناه $(x-1)(x+3)=0$

معناه: $x=1$ أو $x=-3$ مرفوض

وعليه إشارة المشتق هي حسب إشارة $x-1$

و هي حسب الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-		+	
g(x)	4 ↘		3	↗	$+\infty$

II1-أ)حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

$$*\ \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

$$*\ \lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند0 لأن العدد المشتق من اليمين(-3) لايساوي العدد المشتق من اليسار(-5).

ب) اعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

k قابلة للإشتقاق من اليمين وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 النقطة التي احداثياها $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k

2)كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و(Δ_2)

*(Δ_1) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0\geq 0$

لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

ومنه: $y=-3(x-0)+4$ أي $y=-3x+4$

*(Δ_2) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0\leq 0$

لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

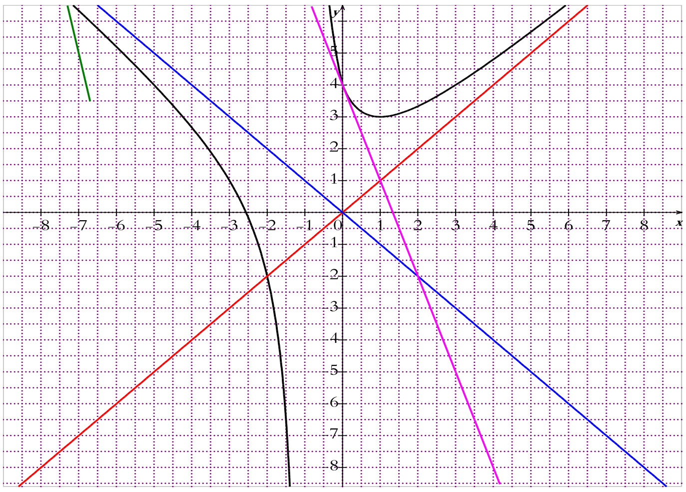
ومنه: $y=-5(x-0)+4$ أي $y=-5x+4$

3)رسم كلا من (Δ_1) و(Δ_2) والمنحنى (C_k)

لرسم المنحنى (C_k) نلاحظ:

إذا كانت $x\leq 0$ فإن: $k(x)=f(x)$ ومنه: $(C_f)=(C_k)$

إذا كانت $x\geq 0$ فإن: $k(x)=g(x)$ ومنه: $(C_g)=(C_k)$



دورة2008

1-أ)تشكيل جدول تغيرات الدالة g بقراءة بيانية

من البيان يمكن استنتاج الجدول

x	-1		α		$+\infty$
g'(x)					
g(x)	-2	↗	0	↗	$+\infty$

تحديد g(0) وإشارة g(0.5)

من البيان لدينا g(0)=-1 وإشارة g(0.5)>0

ب)تعليل وجودعدد حقيقي $\alpha\in]0;\frac{1}{2}[$ **يحقق** $g(\alpha)=0$

g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0،\frac{1}{2}]$ و $g(0)\times g(\frac{1}{2})\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$

جـ) استنتاج اشارة g(x) على المجال]-1 ، +∞[

من جدول التغيرات لدينا:

اذاكانت $x\in]-1;\alpha[$ فإن $g(x)\in]-2;-1[$

اذاكانت $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x)\in]-1;+\infty[$

2-أ)التحقق أن $\mathbf{f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}}$

لدينا: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$

f قابلة للإشتقاق على المجال]-1 ، +∞[حيث:

$$f'(x)=\frac{g'(x)(x+1)^2-2(x+1)g(x)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)(x+1)-2g(x)}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب)تعيين $\mathbf{\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}}$ **دون حساب**

حسب تعريف العدد المشتق لدينا

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$$

من النتيجة السابقة نستنتج ان للمنحنى (Γ) مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته y=f(α)

جـ)حساب $\mathbf{\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)}$ **،** $\mathbf{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]}$

لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى(Γ) مقارب يوازي حامل محور التراتيب معادلته: x=-1

لدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=+\infty$

التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى(Γ) مقارب مائل معادلته: y=x+1 في جوار $+\infty$

د) تشكيل جدول تغيرات الدالة f

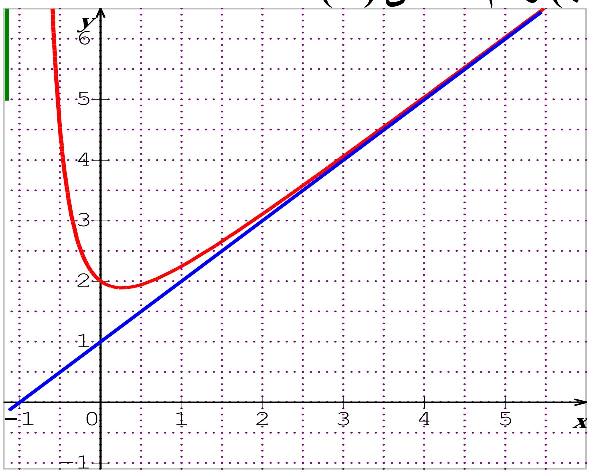
اشارة f'(x) هي حسب اشارة g(x)

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3-أ)تعيين مدور f(α) إلى $\mathbf{10^{-2}}$

لدينا: $f(0,26)=1,89$

ب) رسم المنحنى (Γ)



الدوال الأسيـــــة

دورة2013

1)حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ **و** $\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)$

لدينا: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ والمعرفة على $]-\infty;1[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=2$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=1$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left(\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=-\infty$$

لأن: $\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن :

المستقيم ذا المعادلة : $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

2)حساب $f'(x)$ وتبيان أن f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'+\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

ومنه: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\left[1+e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

$f'(x)\prec 0$ لأن $1+e^{\frac{1}{x-1}}\succ 0$ و $\frac{-1}{(x-1)^2}\prec 0$

منه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$		0		α		1
$f'(x)$		-		-		-	
$f(x)$	2	↘	e^{-1}	↘	0	↘	$-\infty$

3)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha\in]-\infty;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

في الجدول لدينا: $f(0,21)=0,016$ و $f(0,22)=-0,005$

من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha\in]0,21;0,22[$.

4)رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)

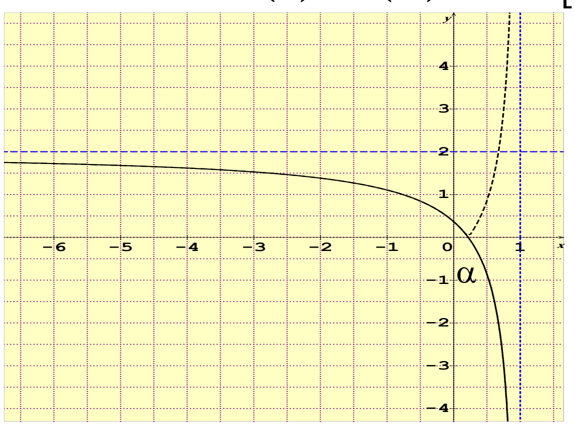
و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

توضيح: كيفية رسم (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

لدينا: $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;x\in]-\infty;\alpha] \\ -f(x) & ;x\in]\alpha;1[\end{cases}$

ومنه: $x\in]-\infty;\alpha]$ معناه $(C')=(C)$

$x\in[\alpha;1[$ معناه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل



5) تعيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة أي المستقيم ذو المعادلة $y=m$ يقطع المنحنى (C') في نقطتين مختلفتين

من البيان نجد أن : $m\in]e^{-1};2[$

II-1)دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty;1[$

* $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$

*لدينا: $g(x)=f(2x-1)$ ومنه $g'(x)=2f'(2x-1)$

وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ لأن $f'(2x-1)\prec 0$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		1
$g'(x)$		-	
$g(x)$	2	↘	$-\infty$

2أ)التحقق أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ **وأن:** $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=f(\alpha)=0$ من الجواب 3

$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=2f'(\alpha)$

ب)استنتاج معادلة (T) المماس لـ g عند الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T): y=g'(\frac{\alpha+1}{2})(x-\frac{\alpha+1}{2})+g(\frac{\alpha+1}{2})$

ومنه: $(T): y=2f'(\alpha)(x-\frac{\alpha+1}{2})+0$

جـ)التحقق أن: $y=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ **معادلة للمستقيم (T)**

لدينا: $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}-\frac{-1}{(\alpha-1)^2}e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

لكن: $f(\alpha)=0$ معناه $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$

ومنه : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)^3}=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$(T): y=2\frac{1}{(\alpha-1)^3}(x-\frac{\alpha+1}{2})=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$

دورة2012

1-I) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ لأن $\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $g'(x)=(1-xe^x)'=0-(1e^x+xe^x)=e^x(-x-1)$

$g'(x)=0$ معناه $(-x-1)=0$ لأن $e^x\succ 0$

معناه $(-x-1)=0$ أي $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	0	-

وعليه جدول التغيرات يكون كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1 ↗	$g(-1)$	↘ $-\infty$

3-أ) تبيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

و $g(-1)\succ 0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث يحقق $f(\alpha)=0$.

ب) التحقق أن $0,5\prec\alpha\prec 0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: $g(0,5)\succ 0$ و $g(0,6)\prec 0$ ومنه $0,5\prec\alpha\prec 0,6$

لدينا: $g(]-\infty;\alpha[)=]1;0[$ معناه $g(x)\succ 0$

$g(]\alpha;+\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec 0$.

1-II) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-x)=\lim_{x\to-\infty} x(e^x-1)=+\infty$

2) تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;2]$: $f'(x)=-g(x)$

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;2]$:

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x-1=-(1-xe^x)=-g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;2]$ وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=-g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $f(2)$

3) تبيّان أن $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$ واستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $0,5\prec\alpha\prec 0,6....(1)$

ومنه: (1) تكافئ $0,25\prec\alpha^2\prec 0,36$

وتكافئ $1,25\prec\alpha^2+1\prec 1,36....(2)$

من المتباينتين (1) و(2) نجد: $\frac{1,25}{0,6}\prec\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\prec\frac{1,36}{0,5}$

أي $2,08\prec\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\prec 2,72$ ومنه $-2,72\prec f(\alpha)\prec -2,08$

4-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

ومنه: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=(x-1)e^x$

إشارة الفرق $(x-1)e^x$ هي حسب إشارة $(x-1)$ لأن $e^x\succ 0$

وعليه وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تكون حسب الجدول التالي.

x	$-\infty$	1	2
إشارة الفرق	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

5-أ) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن x_1 و x_2

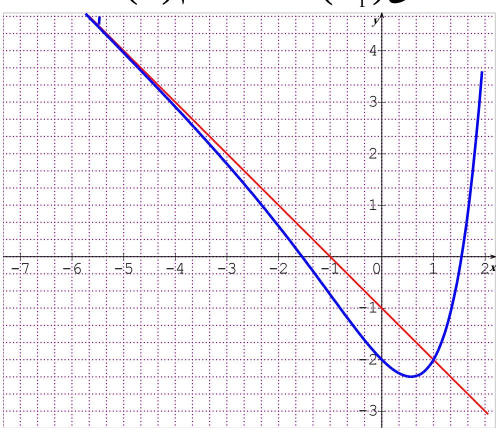
لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

و $f(-1,5)=-0,05$ و $f(-1,6)=0,07$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_2 حيث $f(x_1)=0$ يحقق $-1,6\prec x_1\prec -1,5$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;2[$

و $f(1,5)=-0,26$ و $f(1,6)=0,37$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_2 حيث $f(x_2)=0$ يحقق $1,5\prec x_2\prec 1,6$

ب) إنشاء المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)



دورة2011

1-أ)حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=0+\infty-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-ex-1)=+\infty-\infty$$ ح.ع. ت

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$$

ب)حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها

$f'(x)=e^x-e$ وإشارته هي - 1 +

جـ)تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2-أ)بيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}(e^x)=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=-ex-1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

ب)كتابة معادلة للمماس(T)

(T) له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=(1-e)(x)+0=(1-e)x$

جـ)بيان ان المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α

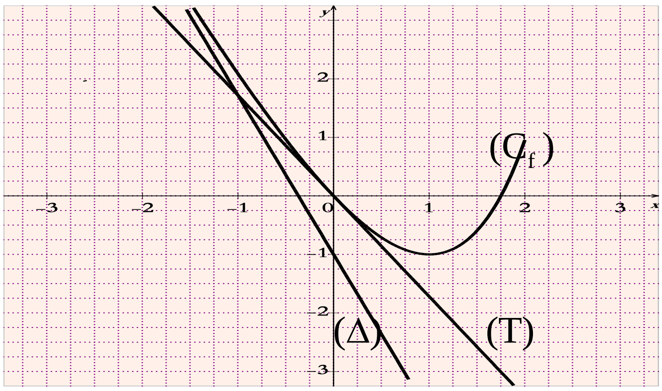
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$

و $f(1,76)=0,028$ $f(1,75)=-0,0023$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد

α محصور بين $1,75$ و $1,76$ يحقق: $f(\alpha)=0$

د)رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f)



دورة2010

1-أ)حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x+0=+\infty$$

ب) حساب $\lim_{x\to0^+} f(x)$ **و** $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **التفسير الهندسي**

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{-1}{e^x-1}\right)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-1}{e^x-1}\right)=-\infty$$

من النهايتين السابقتين نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة :

$x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $f'(x)=1-\left(\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}\right)=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)\succ0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

-أ)تبيين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين

(Δ) **و** (Δ') **معادلتاهما على الترتيب:** $y=x$ ، $y=x+1$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x-1}\right)=0$

ومنه : $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{e^x-1}\right)=0$

ومنه : $(\Delta'): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب)دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ')

لدينا:من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$ $f(x)-x=\left(-\frac{1}{e^x-1}\right)\prec0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ يكون فوق (C_f)

لدينا:من أجل كل $x\in\mathbb{R}_-^*$ $f(x)-(x+1)=\left(\frac{-e^x}{e^x-1}\right)\succ0$

ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ يكون تحت (C_f)

4)إثبات أن النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

$\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر لـ (C_f) معناه $f(-x)+f(x)=1$

لدينا:

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}$$
$$=-\frac{e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1}{e^x-1}=1$$

5-أ) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_+^*$

ومنه $f(\ln 2)\times f(1)\prec 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد α محصور بين $\ln 2$ و 1 يحقق: $f(\alpha)=0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}^*_-$

ومنه $f(-1{,}4)\times f(-1{,}3)\prec 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد β محصور بين $-1{,}4$ و $-1{,}3$ يحقق: $f(\beta)=0$

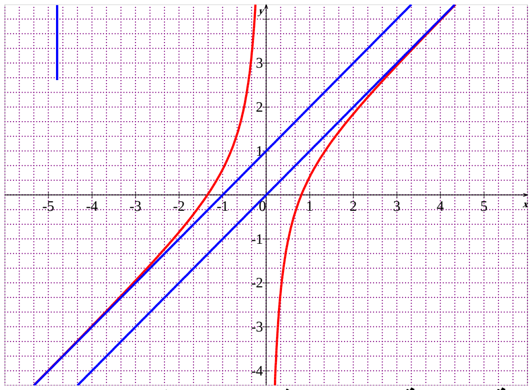
ب) البحث عن وجود مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)

المماسات لـ (C_f) والتي توازي (Δ) معامل توجيهها 1

ومنه: $f'(x_0)=1$ ومنه: $1+\dfrac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}=1$ أي $e^{x_0}=0$

أي لا يوجد حل إذن لا يوجد مماس يوازي (Δ)

جـ) رسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f)



د) المناقشة البيانية وحسب قيم الوسيط الحقيقي m لعدد وإشارة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$

نضع: $(m-1)e^{-x}=m....(1).$

(1) تكافئ $(m-1)=me^{x}$ تكافئ $m(e^{x}-1)=-1$

تكافئ $m=-\dfrac{1}{e^{x}-1}$ تكافئ $x+m=x-\dfrac{1}{e^{x}-1}$

تكافئ $x+m=f(x)$ تكافئ $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة: $y=x+m$ من البيان نجد:

إذا كانت $m\prec 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حل موجب تماما.

إذا كانت $0\le m\le 1$ فإن المعادلة (1) لاتقبل حلول.

إذا كانت $m\succ 1$ فإن المعادلة (1) تقبل حل سالب تماما.

دورة 2008

I- تعيين العددين الحقيقيين a و b

معرفة على $[-2؛+\infty[$ حيث: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

لدينا: $f(-1)=1$ معناه $(-a-1)e+1=1$ ومنه $a=b$

لدينا: $f'(-1)=-e$ معناه $(2a-b)e=-e$ ومنه $2a-b=-1$

نستنتج مما سبق أن $a=b=-1$

II-أ) تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ والتفسير الهندسي

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{u\to-\infty} g(u)=\lim_{u\to-\infty}(ue^{u})+1=1$$

نستنتج مما سبق أن المستقيم ذو المعادلة $y=1$

مقارب يوازي محور الفواصل للمنحنى (C_f).

ب) دراسة تغيرات الدالة g

$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ معرفة على $D_f=[-2؛+\infty[$

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ ، $g(-2)=e^{2}+1$

اتجاه التغير: g قابلة للإشتقاق على D_f حيث:

$g'(x)=xe^{-x}$ يمكن استنتاجه من الجواب I

$g'(x)=0$ معناه $x=0$ وشارته هي حسب اشارة x

جدول التغيرات

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$e^{2}+1$	↘	0	↗	1

جـ) تبيين ان المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I

يقبل نقطة انعطاف I معناه g'' ينعدم ويغير اشارته

لدينا: $g'(x)=xe^{-x}$ ومنه: $g''(x)=(1-x)e^{-x}$.

$g''(x)=0$ إذاكانت $x=1$ واشارته هي حسب الجدول

x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		+	0	-	

لدينا: $g(1)=-2e^{-1}+1$

ومنه نقطة الإنعطاف هي $I(1,g(1))$

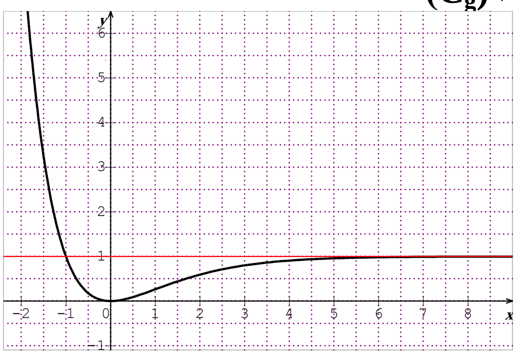
د) كتابة معادلة المماس لـ (C_g) عند نقطة انعطاف I

معادلة المماس هي: $y=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)$

ومنه: $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

أي: $y=e^{-1}(x-1)+-2e^{-1}+1$ وإذن: $\boxed{y=e^{-1}x-3e^{-1}+1}$

هـ) إنشاء (C_g)



III تعيين اتجاه تغيير k وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: k معرفة على $[-2؛+\infty[$ حيث: $k(x)=g(x^{2})$

k قابلة للإشتقاق على $[-2؛+\infty[$ حيث:

$k'(x)=2xg'(x^{2})$ ومنه: $k'(x)=2x(x^{2})e^{-x^{2}}$

$k'(x)=0$ معناه $x=0$. اشارة $k'(x)$ هي حسب اشارة x

جدول تغيرات الدالة k

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	
$k(x)$	$-5e^{-2}+1$	↘	0	↗	1

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها

$g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$ و $x\in\,]-1;+\infty[$

حساب النهايات

ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2\ln(x+1))$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{x^2}{(x+1)}-2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} g(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}(-2\ln(x+1))=-2(-\infty)=+\infty$$

اتجاه التغير

من أجل كل $x\in\,]-1;+\infty[$: $g'(x)=2(x+1)-\dfrac{2}{(x+1)}$

ومنه: $g'(x)=\dfrac{2\left[(x+1)^2-1\right]}{(x+1)}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $x(x+2)$ على $]-1;+\infty[$

ومنه : $g'(x)=0$ معناه $x=0$

$g'(x)\prec 0$ معناه $x\in\,]-1;0[$

$g'(x)\succ 0$ معناه $x\in\,]0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2) استنتاج أن $g(x)\succ 0$ من أجل كل $x\in\,]-1;+\infty[$

الدالة g تقبل 4 كقيمة حدّية صغرى

أي $g(x)\geq 4$ من أجل كل $x\in\,]-1;+\infty[$ إذن: $g(x)\succ 0$

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا

لدينا $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ و $x\in\,]-1;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-1-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$$

المستقيم ذي المعادلة : $x=-1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$$

2-أ) تبيّان أنه من أجل كل $x\in\,]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{(x+1)}(x+1)-1(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

$$=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بعد التبسيط نجد: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ أي $f'(x)\succ 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$				+			
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	$+\infty$

جـ) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$ حسب مبرهنة القيم

المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha\in\,]-1;+\infty[$ حيث: $f(\alpha)=0$

التحقق أن : $0\prec\alpha\prec 0{,}5$

لدينا: $f(0)=-1$ و $f(0{,}5)=0{,}37$ أي: $f(0)\prec 0\prec f(0{,}5)$

3-أ) تبيّان أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$(\Delta): y=x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة على (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x)-x=0$ معناه $x=\sqrt{e}-1$

$f(x)-x\prec 0$ معناه $x\in\,]-1;\sqrt{e}-1[$

$f(x)-x\succ 0$ معناه $x\in\,]\sqrt{e}-1;+\infty[$

وعليه : (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}-1$

(C_f) تحت (Δ) في المجال $]-1;\sqrt{e}-1[$

(C_f) فوق (Δ) في المجال $]\sqrt{e}-1;+\infty[$

4-أ) حساب x_0 فاصلة نقط التماس لـ (C_f) و (T)

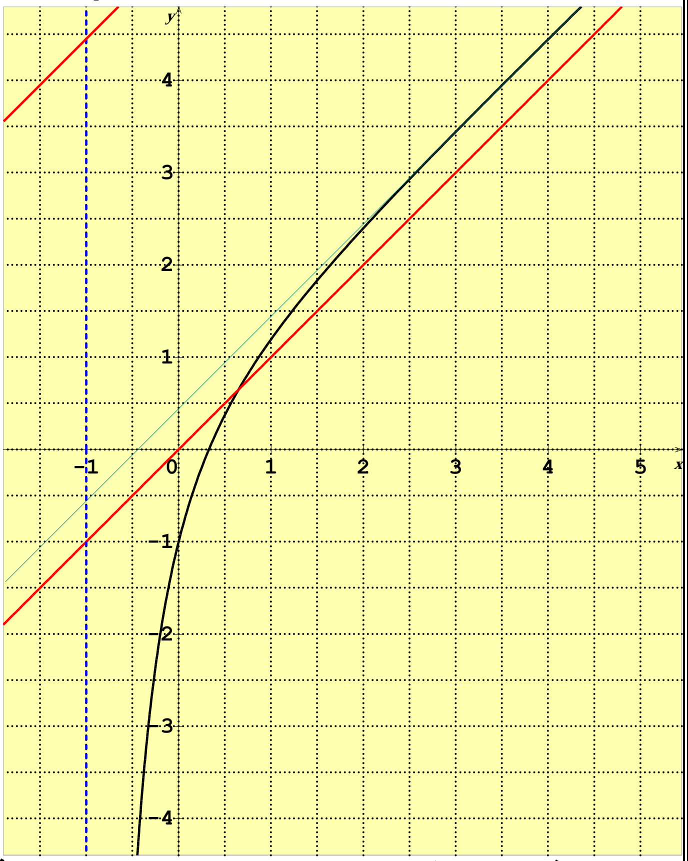
لدينا: معادلة (T) هي: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$

(T) مماسا لـ (C_f) معناه $f'(x_0)=1$

$\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ معناه $f'(x_0)=1$

معناه $g(x_0)=(x_0+1)^2$ ومنه: $x_0=e\sqrt{e}-1$

ب)رسم المستقيمين المقاربيّن والمماس (T) و (C_f)



ج)تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا حتى تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ **حلّين متمايزين**

المعادلة $f(x)=x+m$ تكافئ $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حيث $y=x+m$ معادلة مستقيم (Δ_m) معامل توجيهه 1

و $y=f(x)$ معادلة المنحنى (C_f)

الحالة 1 : $m=0$ يكون $(\Delta_m)=(\Delta)$

الحالة2 : $m=\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ يكون $(\Delta_m)=(T)$

وعليه نجد من البيان يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلان متمايزان إذا وفقط إذا كانت $0\prec m\prec\frac{2}{\sqrt{e^3}}$

دورة2012

1) أ)حساب $\lim_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)$ **وتفسيرالنتيجة هندسيا**

$$\lim_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{\prec}0}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=-\infty$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب)حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+5)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$

2)تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ **:** $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

لدينا: $f(x)=x+5+6((\ln x-\ln(x-1))$

ومنه: $f'(x)=1+6\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f **وتشكيل جدول تغيراتها**

ندرس إشارة $f'(x)$

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=0$ معناه $x^2-x-6=0$

معناه $x=-2$ أو $x=3$ مرفوض

ومنه أشارة $f'(x)$ تكون كالآتي:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$-\infty$

لدينا: $f(-2)=3-6\ln(2)+6\ln 3=0,56$

3-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) **الذي معادلته** $y=x+5$ **هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **بجوار** $-\infty$**.**

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=6\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{x}{x-1}=0$

ومنه: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب)دراسة وضع المنحنى (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=6\ln\frac{x}{x-1}$

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $\frac{x}{x-1}\le 1$

ومنه $\ln\frac{x}{x-1}\le 0$ أي الفرق $(f(x)-y)\prec 0$

وعليه يكون المنحنى (C_f) يكون تحت المستقيم (Δ)

4) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلّين** α **و** β

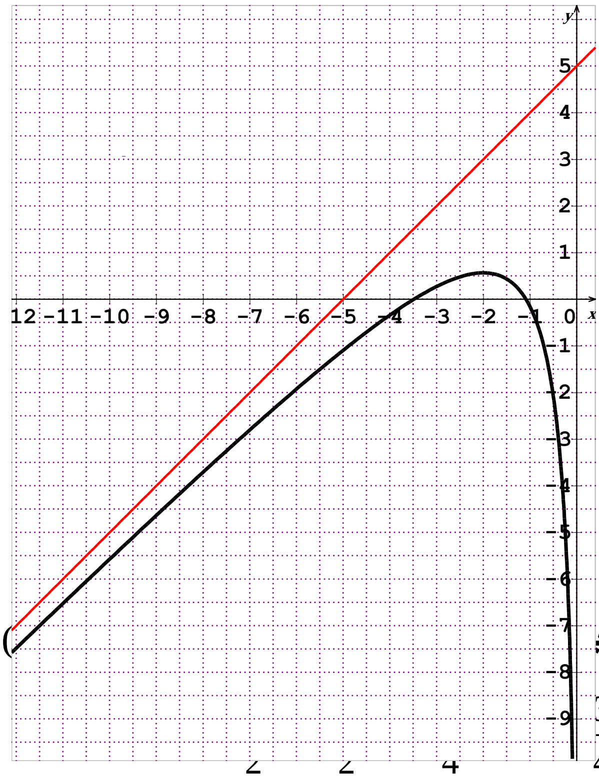
لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-2;0[$

و $f(-1,1)=0,02$ و $f(-1)=-0,15$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة (مبرهنة كوشي) يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث $-1,1\prec\beta\prec-1$ يحقق $f(\beta)=0$

لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2[$

و $f(-3,5)=1,33$ و $f(-3,4)=-0,15$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة (مبرهنة كوشي) يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $-3,5\prec\alpha\prec-3,4$ يحقق $f(\alpha)=0$.

5) انشاء المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)



6-أ)تب

لدينا $\frac{3}{4}$

$$y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$

ومنه $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة (AB)

ب)تبيان ان المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين احداثيتها.

(AB) يمس المنحنى (C_f) معناه $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة نقطة M_0 .

$f'(x_0)=\frac{1}{2}$ معناه $\frac{x_0^2-x_0-6}{x_0(x_0-1)}=\frac{1}{2}$

معناه $2x_0^2-2x_0-12=x_0^2-x_0$

معناه $x_0^2-x_0-12=0$

ومنه: $x_0=-3$ أو $x_0=4$ مرفوض

ولدينا $f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$ أي $M_0(-3;f(-3))$

ولدينا من جهة أخرى احداثيات النقطة M_0 تحقق صحة معادلة المستقيم (AB) .

دورة2011