أمثلة وتمارين و طرائق

. بالاختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـِ $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

- أحسب $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^3+2x^2+x+2\right)$ و $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟
- قم بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 .
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ ، $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.
- استنتج نهاية الدالة f عند -2.

الحل

لدينا

$$\lim_{x\to2}\left(x^3+2x^2+x+2\right)=-8+8-2+2 \qquad \lim_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=4-2-2$$

$$\lim_{x\to2}\left(x^3+2x^2+x+2\right)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=0$$

ومنه فإنه ينتج $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}\right)$ وهي حلة عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$

- بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 .
- لدين كل من من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 يقبلان القسمة على من $(x+2)$.

لدينا

$$x^3+2x^2+x+2=(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$x^3+2x^2+x+2=ax^3+bx^2+cx-2ax^2+2bx+2c$$

$$x^3+2x^2+x+2=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$$

لدينا $\begin{cases} a=1 \\ b+2a=2 \\ c+2b=1 \\ 2c=2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$ وبتالي $x^3+2x^2+x+2=(x+2)\left(x^2+1\right)$

ملاحظة

يمكن إستعمال القسمة الإقليدية.

ومن جهة أخرى

لدينا $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

ملاحظة

نقوم بحساب المميز ثم نعين الجذور x_1 و x_2 ومنه يكون تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية من الشكل

$ax2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$،

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$$

$$f(x)=\frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$.

استنتاج نهاية الدالة f عند -2.

لدينا $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{2^2+1}{2-1}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=5$$

ومنه فإن $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x)=5}$.

تطبيق:

أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

الحل

لدينا $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}\right)$ وهي حلة عدم التعين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

لدينا $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ومنه $x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)$

لدينا $x^2-2x+1=(x-1)^2$

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}\right)$$

ومنه
$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}\right)$$

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)}\right)$$

نعلم أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x-1)=0^-$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} g(x)=-\infty$

نعلم أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(x-1)=0^+$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=+\infty$

ماذا يجب أن تعلم

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث x_1 و x_2 هما جذور المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

إذا كان العدد **1** هو حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ فإن الحل الثانى يكون من الشكل $x'=\dfrac{c}{a}$ ومنه

ينتج لدينا　　في حالة $a\neq1$ نكتب $ax^2+bx+c=(x-1)\left(x-\dfrac{c}{a}\right)$

في حالة $a=1$ نكتب $x^2+bx+c=(x-1)(x-c)$