المعادلات التفاضلية

Les Equations Différentielles

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay$

حلول المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولي من الشكل $y'=ay$ هي على مجموعة الدوال المعرفة $f_c(x)=ce^{ax}$ حيث عدد حقيقي ثابت

مبرهنة

من اجل كل ثنائية (x_0,y_0) المعادلة تقبل حلا وحيدا يحقق $f_c(x_0)=y_0$

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية $y'-2y=0$

عين مجموعة حلول المعادلة (1)

عين الحل الدي يأخد القيمة 5 من أجل 0

الحل

$y'-2y=0$ يعني $y'=ay$ هي معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$

حلها العام من الشكل $f_c(x)=ce^{ax}$ ومنه مجموعة حلوال المعادلة هي

$f_c(x)=ce^{2x}$

تعين الحل الدي يأخد قيمة 5من اجل 0

لدينا $f_c(0)=5$ ومنه $ce^0=5$

ادن $c=5$

ومنه الحل الخاص $f_c(x)=5e^{2x}$

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$

حلول المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولي من الشكل $y'=ay+b$ على هي مجموعة الدوال المعرفة $f_c(x)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث عدد حقيقي ثابت

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية $y'+3y=5$

عين مجموعة حلول المعادلة (1)

عين الحل الدي يأخد القيمة 1 من أجل 0

الحل

$y'+3y=5$ يعني $y'=-3y+5$ هي معادلة تفاضلية من الشكل

$y'=ay+b$ حلها العام من الشكل $f_c(x)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ ومنه مجموعة

حلوال المعادلة هي $f_c(x)=ce^{-3x}+\frac{5}{3}$

تعين الحل الدى يأخد قيم1 من اجل 0

لدينا $f_c(0)=1$ ومنه $ce^0+\frac{3}{5}=1$ ادن $c=-\frac{2}{3}$

ومنه الحل الخاص $f_c(x)=-\frac{2}{3}e^{-3x}+\frac{5}{3}$

تمارين تطبيقية

تمرين01

تنعتبر المعادلة التفاضلية $5y'-2y=0$

عين مجموعة حلول المعادلة (1)

عين الحل الدي يأخد القيمة1 من أجل 0

تمرين02

نعتبر المعادلة التفاضلية $y'+y=0$

عين مجموعة حلول المعادلة (1)

عين الحل الدي يأخد القيمة 5 من أجل 1

تمرين03

عين مجموعة حلول المعادلة $y'-2y=1$

عين الحل الدي يأخد القيمة 6من أجل 0

مثال 03

نعتبر المعادلة التفاضلية $2y'+3y=x^2+1$..................(1)

● بين أنه توجد دالة f كثير حدود من الدرجة الثانية هي حل للمعادلة (1)

● عين مجموعة حلول المعادلة $2y'+3y=0$..........(2)

● بين أن الدالة $g-f$ تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط اذا كانت g حلا للمعادلة (1)

● استنتج جميع حلول المعادلة (1)

● عين الحل الدي ينعدم من أجل 0

الحل

نعتبر f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية حيث

$f(x)=ax^2+bx+c$ و منه $f'(x)=2ax+b$

تكون حلا للمعادلة (1) اذا تحقق $2f'(x)+3f(x)=x^2+1$

ومنه $2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$

$3ax^2+(4a+3b)x+2b+3c=x^2+1$

بالمطابقة $\begin{cases}3a=1\\4a+3b=0\\2b+3c=1\end{cases}$ اذا $\begin{cases}a=1/3\\b=-(2/3)a\\c=(1-2b)/3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=1/3\\b=-4/9\\c=17/27\end{cases}$

ادن عبارت الدالة هي $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$

حلول المعادلة (2)

$2y'+3y=0$ يعني $y'=-\frac{3}{2}y$ هي معادلة تفاضلية من الشكل

$y'=ay$ حلها العام من الشكل $h_c(x)=ce^{ax}$ ومنه مجموعة حلوال

المعادلة هي $h_c(x)=ce^{-\frac{3}{2}x}$

نبين أن الدالة $g-f$ تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط اذا كانت g حلا للمعادلة (1)

الدالة $g-f$ تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط

$2(g-f)'+3(g-f)=0$

ومنه $2g'-2f'+3g-3f=0$ ومنه $2g'-3g=2f'+3f$

بمأن $2f'(x)+3f(x)=x^2+1$ فان $2g'-3g=x^2+1$

اذا g هو حل للمعادلة التفاضلية (1)

مجموعة حلول المعادلة (1) هي الدالة g

وبمأن $g-f$ تكون حلا للمعادلة (2) فان $g(x)-f(x)=h_c(x)$

اذا $g(x)=f(x)+h_c(x)$ ومنه $g(x)=ce^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

الحل الدي ينعدم من أجل 0

لدينا $g(0)=1$ ومنه $ce^0+\frac{17}{27}=0$ ادن $c=-\frac{5}{3}$

ومنه الحل الخاص $g(x)=-\frac{17}{27}e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$

لا تدع لسانك يشارك عينك عند انتقاد الأخرين فلا تنسى انهم مثلك لهم أعين و ألسن

مسألة 01 بكالوريا فرنسية

الجزء الأول

نعتبر المعادلة التفاضلية $y'-2y=xe^x$ ....(1)

لتكن دالة معرفة كمايلي $u(x)=(ax+b)e^x$

عين a و b حتى تكون u حلا للمعادلة (1)

عين مجموعة حلول المعادلة $y'-2y=0$ ....(2)

بين أن g تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط اذا كانت $u+g$ حلا للمعادلة (1)

استنتج جميع حلول المعادلة (1)

عين الحل الدي ينعدم من أجل 0

الجزء الثاني

g دالة معرفة كما يلي $D_g=\mathbb{R}$ $g(x)=2e^x-x-2$

أدرس تغيرات الدالة g

بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث $-1,6 \prec \alpha \prec -1.5$

و أخر هو 0 ثم عين اشارة $g(x)$

الجزء الثالث

f دالة معرفة كما يلي $D_f=\mathbb{R}$ $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

بينأن $f'(x)=e^x g(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f

بين أن $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ثم أعطي حصرا $f(\alpha)$

أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أعطي تفسيرات هندسيا للنتيجة

بين أن $f(x)=xe^x(e^x-\dfrac{x+1}{x})$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

شكل جدول تغيرات الدالة

أكتب معادلة المماس (T) عند 0

أنشيء C_f و (T)

توظيف المعادلات التفاضلية في الوضعيات الأدماجية

مسألة 02 france 2005

f دالة معرفة كما يلي $D_f=[0,+\infty[$ $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$

بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

بين أنه على المجال $[0,+\infty[$ فان المعادلة $f(x)=10$ تقبل حلا وحيدا α

أعطي حصرا للعددα بتقريب 10^{-3}

أنشيء المنحنى C_f

الجزء الثاني

نضع $y(t)$ قيمة درجة حرارة تفاعل كميائي مقدرة بدرجة سيلسيوس عند اللحظة t مقدرة بالساعات القيمة الأنتدائية عند اللحظة $t=0$ هي $y(t)=10$

نقبل بأن الدالة التي ترفق نكل عدد حقيقي t من المجال $[0,+\infty[$ العدد $y(t)$

هي حل للمعادلة التفاضلية $y'+\dfrac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$ ....(1)

1)تحقق أن الدالة f المدروسة في الجزء الأول هي حل للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0,+\infty[$

2)نقترح فيما يلي البرهان على أن الدالة f هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية (1)على المجال والتي تأخذ قيمة 10 عند اللحظة 0

أ)ليكن g حلا كيفيا للمعادلة التفاضلية (1) علي المجال $[0,+\infty[$ بحيث $g(0)=10$

بين أن الدالة $f-g$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $y'+\dfrac{1}{2}y=0$ ....(2)

حل المعادلة التفاضلية (2)ماذا تستنتج

3) ما هو الوقت اللازم حتي تنزل درجة الحرارة الى قيمتها الأ بتدائية تدور النتائج الى الدقيقة

استعمال التناقص الأسي في دراسة تغير وسط بكتيري

يقوم عالم مختص في البكتريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق يقدر العدد البتدائي لدا المجتمع بـ 100 بكتريا و القدرة الأستيعابية العظمي هي 1000 بكتريا

لتكن $N(t)$ عدد البكتريا في اللحظة t (معبر عنها بالساعات)

الملاحظات المستخلصة قادتنا الى نمدجة هده الحالة بمعادلة تفاضلية

$$N'(t)=0.07N(t)(1-10^{-3}N(t))$$

نضع $P(t)=\dfrac{1}{N(t)}$ مع $N(t)\neq 0$

1)بين الدالة P تحقق المعادلة التفاضلية $P'=-0.07P+7\times10^{-5}$

2)استنتج عبارة $P(t)$ ثم عبارة $N(t)$ بدلالة t

3)ماهو عدد البكتريا بعد 40 ساعة

4) ماهو الوقت الازم حت يصبح عدد البكتريا يمثل 80%من قدرة الأستيعابية العظمي لهدا الوسط

تحول اللأزوت بالهواءالجوي الى الكربون المشع

يحتوي الغلاف الجوي على مادة الأزوت والتي بفعل الأشعاعات الكونية تتحول الى مادة الكربون المشع C^{14} و تحتوي الكائنات الحية على هده المادة التي تتجدد على الدوام و عند موتها فان مادة الكربون C^{14} تتحلل تدريجيا **تتناقص في الوسط**

لمعرفة زمن وفاة كائن حي نقوم بقياس نسبة الكربون C^{14} المتبقية في جسمه

لتكن عدد درات الكربون C^{14} المتواجدة في اللحظة t المعبر عنها بالأعوام في عينة من مادة عضوية

بين الفزيائيوزن أن الدالة N اتحقق المعادلة

$$N'(t)=-K\times N(t)$$

من أجل كل عدد حقيقي t موجب حيث $K=1,245\times10^{-4}$ و

$$N(0)=N_0$$

نفول أن سرعة التحلل C^{14} متناسبة مع عدد درات C^{14} المتواجدة فى تلك اللحظة

1)أوجد $N(t)$ بدلالة N_0 و t

2)ماهي نسبة الكربون C^{14} المفقودة خلال 1000 سنة

3)نسمي نصف حياة الكربون C^{14} الزمن الازم لتحول نصف درات الكربون C^{14}

● برر العلاقة $N'(t+T)=\dfrac{1}{2}N(t)$ حيث T هو نتصف حيات C^{14}

● استنتج أن $T=\dfrac{Ln(2)}{K}$ معينا القيمة التقريبية له

4)قام العلاماء الأثار بتحليل شظايا العظام وجدت في كهف فوجدو نسبة الكربون C^{14} الموجودة تمثل 20 %من نسبة الكربون C^{14} الموجودة في عينة عظام جديدة لها نفس الكتلة

- أوجد عمر شظايا العظام

النقد الظالم قوة للناجح و دعاية مجانية له و أعلان محترم له و تنويه بفضله وقدرته ....نريد النقد البناء

مسألة01   France 2010

الجزء الأول

نعتبر المعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$ ....(1)

لتكن دالة معرفة كمايلي $u(x)=xe^{-x}$

بين أن الدالة هي حلا للمعادلة (1)

عين مجموعة حلول المعادلة $y'+y=0$..........(2)

بين أن الدالة تكون v حلا للمعادلة (2) ادا وفقط ادا كانت $v-u$ حلا للمعادلة (1)

استنتج جميع حلول المعادلة (1)

عين الحلالوحيد g للمعادلة التفاضلية الدي يأخد قيمة 2من أجل 0

الجزء الثاني

f دالة معرفة كما يلي k $f_k(x)=(x+k)\quad D_f=\mathbb{R}$

بين أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند الفاصلة $x=k-1$

لتكن النقطة M_k من المنحنى C_f دات الفاصلة $x=k-1$

بين أن النقطة M_k تنتمي الى المنحنى الممثل للدالة $y=e^{-x}$ لما يتغير k في $\mathbb{R}$

فيى الشكل المعلم متعامد و متجانس و لاكن سلم الرسم و اسماء المنحنيات المرفقة بالشكل لا تظهر في الشكل

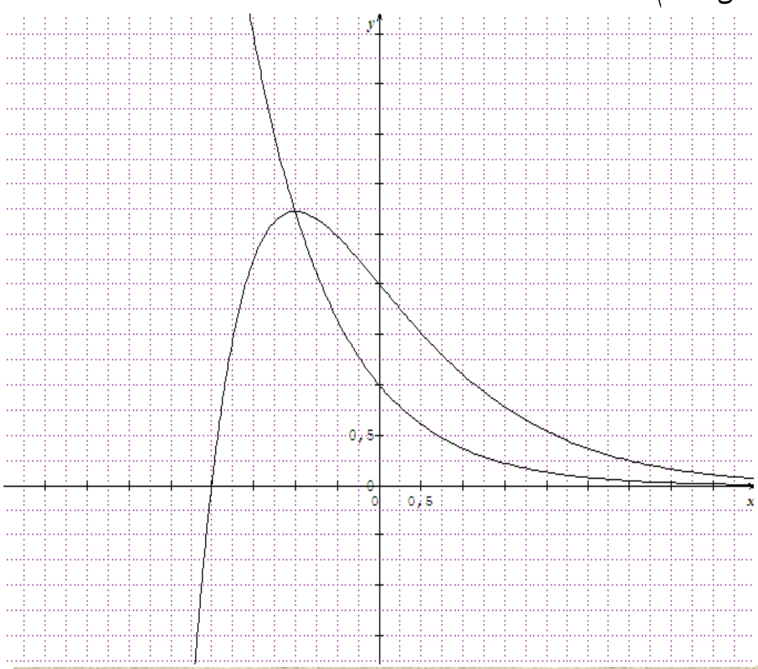
رسمنا منحنى الدالة $y=e^{-x}$

رسمنا منحنى الممثل لـ $f_k(x)=(x+k)\quad D_f=\mathbb{R}$ من أجل بعض القيم للعدد k

- تعرق على المنحنيات وعلى القيم المبينة في الشكل
- مفسرا الطريقة المستعملة عين قيم العدد k المرفقة بكل منحن وكدالك سلم الرسم على المحورين
- شكل جدول تغيرات الدالة المرفقة بالشكل
- أكتب معادلة المماس عند الفاصلة 0

دالة معرفة على كما يلي $Dg=\mathbb{R}$ $\quad g(x)=f_k(x-2)+1$

بين كيف يمكن استنتاج منحنى الدالة g انطلاقا من منحن الدالة f و أرسمه في نفس المعلم



العجز و الكسل و التواني مولدات الفشل و الفقر و الحسرة و الندامة على مافات وماهو أتي   فلا تعجز الأمر بيدك..................

مسألة 7 نقاط لبنان الدورة الأستثنائية 2010

الجزء الأول

نعتبر المعادلة التفاضلية (1)....................$y'+y=2xe^{-x}$

لتكن دالة معرفة كمايلي $Z=ye^{x}$

أكتب معادلة التفاضلية(2) بدلالة انطلاقا من المعادلة (1)

حل المعادلة التفاضلية (2) ثم استنتج الحل الحل العام للمعادلة (1)

عين الحل المعلدلة (1) الدي ينعدم من أجل 0

الجزء الثاني

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=x^2e^{-x}$

وليكن C_f المنحنى البياني الممثل للدالة في ی معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1)بين أن $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ مادا تستنتج؟

3) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4) أدرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيراتها

5)عين ةالنقطة من المنحنى C_f تختلف عن $O(0,0)$ بحيث يكوون المماس للمنحنى C_f عند هده النقط يمر على النقطة $O(0,0)$

6) بين أن المنحنى C_f يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعينهما

- أنشىء المنحن C_f و المماس (T)

7)لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=e^{-x}$ و C_g منحناها البياني في نفس المعلم السابق

- ادرس الأوضاع النسبية للمنحن C_f و C_g
- أنشىء في نفس المعلم C_g

8) لتكن الدالة المعرفة على كما يلي $h(x)=(x^2+2x+2)e^{x}$

- أحسب $h'(x)$ ثم أستنتج علاقة بين $h'(x)$ و $f(x)$ مادا تستنتج ؟
- أحسب المساحة المحددة بين و C_f و C_g المستقيمات $x=1, x=-1$

9) ليكن العدد الحقيقي m حيث $m\succ e$

المستقيم $y=m$ يقطع المنحنى C_f في النقطة p و يقطع C_g في النقطة q

-مثل على الشكل بالتقريب النقط p و q بحيث $x_p\in]-\infty,-1[$ و $pq=1$

- عبر عن المسافة بدلالة x_p و x_q
- برر صحة المساواة $f(x_p)=g(x_q)$
- أحسب x_p فاصلة النقطة p بحيث يكون $pq=1$