التمرين الأول (4 نقط)

1) انشئ جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f(x)=\frac{9}{6-x}$ ومنه $f'(x)=\frac{9}{(6-x)^2}\succ 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما وجدول تغيراتها هو كما يلي:

x	$-\infty$ 3 6
f'(x)	+
f(x)	0 ↗ 3 ↗ $+\infty$

2) البرهان انه اذا كان $x\prec 3$ فإن $f(x)\prec 3$

من جدول تغيرات f لدينا:

إذا كانت $x\prec 3$ فإن $f(x)\prec f(3)$ ومنه $f(x)\prec 3$

3) البرهان بالتراجع ان: $u_n\prec 3$ من اجل كل $n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0\prec 3$ محققة لأن $u_0=-3$

نفرض أن $u_n\prec 3$ ونبرهن أن $u_{n+1}\prec 3$

لدينا: $u_n\prec 3$ ومنه $f(u_n)\prec f(3)$ لأن f متزايدة تماما

ومنه $u_{n+1}\prec 3$ لأن $u_{n+1}=f(u_n)$

4) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)، استنتج انها متقاربة

لدينا f متزايدة تماما و $u_0=-3$ و $u_1=1$ أي $u_0\prec u_1$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

نستنتج مما سبق أن المتتالية (u_n)

متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 3

5-أ) اثبات ان (v_n) حسابية أساسها $\frac{-1}{3}$ حدّد حدّها الأول

(v_n) م.ح. أساسها $-\frac{1}{3}$ معناه $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{-3(u_n-3)}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{u_n-3}{-3(u_n-3)}=-\frac{1}{3}\ .$$

ومنه $v_0=\frac{1}{u_0-3}=-\frac{1}{6}$

ب- كتابة v_n و u_n بدلالة n ، وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا: $v_n=v_0+nr$ ومنه $v_n=-\frac{1}{3}(n+\frac{1}{2})$.

لدينا: $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ ومنه $u_n=\frac{3v_n+1}{v_n}=\frac{6n-3}{2n+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{6n-3}{2n+1}=3$$

التمرين الثاني(4نقط)

1) تبيّن ان النقط A، B، C تعيّن مستويا .

النقط A، B، C تعيّن مستويا معناه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ لا يوازي $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ لأن: $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-2}$

2) التحقق من ان الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ لأن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3.0+1.4+2(-2)=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ لأن $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3(-2)+1.4-1(-2)=0$

الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ ناظما للمستوى (ABC)

ومنه معادلة (ABC) هي $3x+4y-2z+d=0$

$A(1;0;2)\in(ABC)$ معناه $3(1)+4(0)-2(2)+d=0$

ومنه: $d=1$ أي: $(ABC):3x+4y-2z+1=0$

3-أ) تبيين أن تقاطع (P_1) و (P_2) هو مستقيم (d) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا: $\overrightarrow{n_1}(2;1;2)$ لا يوازي $\overrightarrow{n_2}(1;-2;6)$ لأن: $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{2}$

ومنه (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم

لتعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) نحل الجملة التالية:

$$\begin{cases}2x+y+2z+1=0 ......(1)\\ x-2y+6z=0 ......(2)\end{cases}$$

بوضع: $z=t$ وبضرب طرفي المعادلة (1) في 2 نجد:

$$\begin{cases}4x+2y+4t+2=0 ......(3)\\ x-2y+6t=0 ......(2)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (2) و (3) طرف لطرف نجد: $x=-2t-\frac{2}{5}$

بعد التعويض في المعادلة (1) نجد: $y=2t-\frac{1}{5}$

ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (d):

$$\begin{cases}x=-2t-\frac{2}{5}\\ y=2t-\frac{1}{5}\\ z=t\end{cases}$$

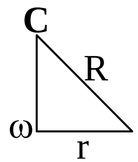
ب- الوضع النسبي للمستقيم (d) والمستوي (ABC)

$\overrightarrow{u_d}(-2;2,1)$ شعاع توجيه (d) لا يعامد الشعاع $\vec{n}_{(ABC)}$

ومنه المستقيم (d) يقطع المستوي (ABC) في نقطة.

4)تعيين النقط المشتركة بين (S) و (P_1)

المسافة بين النقطة C والمستوي (P_1) هي $\frac{2}{3}$ أصغر من 1 نصف قطر سطح الكرة (S) فإن المستوي (P_1) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة .



تعيين العناصر المميزة .

في الشكل المقابل العناصر المميزة للدائرة هي المركز ω ونصف القطر r

لدينا: $r^2 = R^2 - \omega C^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ ومنه : $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$

ولدينا: $\overrightarrow{\omega C}$ يوازي الشعاع $\vec{n}_1$

ومنه: $\overrightarrow{\omega C} = \lambda \vec{n}_1$ حيث λ وسيط حقيقي

ومنه $\overrightarrow{C\omega}\left(x_0+1; y_0-1; z_0-1\right) = \lambda \vec{n}_1\left(2\lambda;\lambda;2\lambda\right)$

وعليه: $x_0 = 2\lambda - 1; y_0 = \lambda + 1; z_0 = 2\lambda + 1$

وبما أن $\omega(x_0;y_0;z_0) \in (P_1)$ فإنه بعد تعويض احداثيات النقطة ω في معادلة (P_1) نجد: $\lambda = -\frac{2}{5}$

ومنه إحداثيات النقطة ω هي : $(-\frac{13}{9};\frac{7}{9};\frac{5}{9})$

التمرين الثالث (4 نقط)

1-أ) حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 2 = 0$

حل المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ بالمميز Δ.

$\Delta' = (-1)^2 - 2 = -1 = (i)^2$

ومنه حلي المعادلة هما: $z' = 1 - i$ و $z'' = 1 + i$

ب) استنتاج حلول المعادلة

$(-iz+3i+3)^2 - 2(-iz+3i+3) + 2 = 0 \ldots (e)$

بوضع : $Z = -iz + 3i + 3$ تصبح المعادلة (e) كمايلي: $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ من الجواب أ) نستنتج أن:

$-iz + 3i + 3 = 1 + i$ أو $-iz + 3i + 3 = 1 - i$

ومنه: $-iz = -2 - 2i$ أو $-iz = -2 - 4i$

إذن : $z = 2 - 2i$ أو $z = 4 - 2i$

2-أ)البرهان أن النقط A ، B و C تنتمي لدائرة واحدة مركزها النقطة ω ذات اللاحقة 3.

لدينا: $\omega A = |z_\omega - z_A| = |2 - i| = \sqrt{5}$

$\omega B = |z_\omega - z_B| = |2 + i| = \sqrt{5}$

$\omega C = |z_\omega - z_C| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي لدائرة واحدة مركزها ω

ب)كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_\omega}{z_A - z_\omega}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_C - z_\omega}{z_A - z_\omega} = \frac{2 - 2i - 3}{1 + i - 3} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = i$$

ومنه : $\frac{z_C - z_\omega}{z_A - z_\omega} = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة A بتحويل نقطي R يطلب تعيينه بدقة مع ذكر العناصر المميزة

لدينا: $\frac{z_C - z_\omega}{z_A - z_\omega} = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}$ تكافئ $z_C - z_\omega = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_\omega)$

العبارة $z_C - z_\omega = 1.e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_\omega)$ تبيين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ)تعيين لاحقتي النقطتين D و B'

لدينا: D صورة النقطة O بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{\omega C}$

ومنه : $z_D = z_O - 2 - 4i = -2 - 4i$

لدينا: B' صورة النقطة B بالدوران R

ومنه : $z_{B'} - z_\omega = i(z_B - z_\omega)$

أي: $z_{B'} = i.z_B + (1 - i)z_\omega = i(1 - i) + 3(1 - i)$

إذن : $z_{B'} = 4 - 2i$

التحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{\omega B'}$ متعامدان.

لدينا: $\overrightarrow{CD}(z_D - z_C)$ ومنه $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\omega B'}(z_{B'} - z_\omega)$: ومنه $\overrightarrow{\omega B'}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{\omega B'}$ لأن $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{\omega B'} = (-4).1 + (-2)(-2) = 0$

التمرين الرابع (8 نقط)

I-1) ادرس تغيّرات الدالة g.

النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - x - 2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}) = +\infty$

اتجاه التغيير: $g'(x) = 2e^x - 1$

$g'(x) = 0$ معناه $2e^x - 1$ ومنه $e^x = \frac{1}{2}$ أي: $x = -\ln 2$

إشارة $g'(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

جدول التغيرات للدالة g

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0,27$	$\nearrow$	$+\infty$

2)تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α في المجال $]-1,6;-1,5[$

لأن الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على هذا المجال

$f(-1,6)\times f(-1.5)\prec 0$ وذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة

3) حساب $g(0)$، واستنتاج إشارة $g(x)$

$g(0)=0$ ومنه اشارة $g(x)$ هي حسب الجدول التالي

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

II-1-أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسيرالنتيجة الأولى بيانيا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-(x+1)e^{x})=0$$

نستنتج ان (C) يقبل المستقيم ذو المعادلة: $y=0$ مقارب افقي

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{2x}(1+(-x-1)e^{-x})=+\infty$$

ب)التحقق أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x}.g(x)$

$$f'(x)=2e^{2x}-\left[1e^{x}+(x+1)e^{x}\right]$$

$$f'(x)=e^{x}\left[2e^{x}-1-x-1\right]=e^{x}.g(x)$$

جـ) دراسة إشارة $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g'(x)$ لأن $e^{x}\succ 0$

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗ $+\infty$

د)تبيين أن $f(\alpha)=-\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ واستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}....(*)$

ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\frac{\alpha+2}{2}$

بتعويض قيمة e^{α} بـ $\frac{\alpha+2}{2}$ في العبارة $(*)$ نجد:

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$$

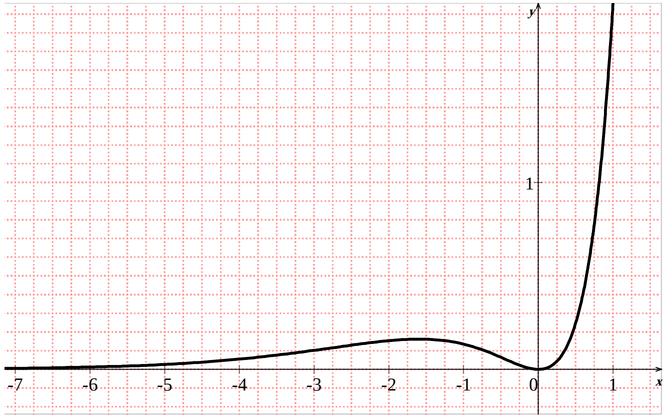
$$.f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(\frac{\alpha+2}{2}-\alpha-1\right)=-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$$

لدينا: $-1,6\prec\alpha\prec-1,5$ ومنه $-3,2\prec 2\alpha\prec -3$

ومنه: $2,25\prec\alpha^2\prec 2,56$ أي: $-0,95\prec\alpha^2+2\alpha\prec-0,44$

$-0,24\prec\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}\prec-0,44$ إذن $-0,89\prec f(\alpha)\prec-0,81$

2-أ)إنشاء المنحنى (C) على المجال $]-\infty;+1]$.



ب)أثبات أن $\int_{\lambda}^{0}(x+1)e^{x}dx=-\lambda e^{\lambda}$ بالمكاملة بالتجزئة

نضع: $u=x+1$ ومنه $u'=1dx$

$v'=e^{x}$ ومنه $v=e^{x}$

$$\int_{\lambda}^{0}(x+1)e^{x}dx=\left[(x+1)e^{x}\right]_{\lambda}^{0}-\int_{\lambda}^{0}1e^{x}dx=\left[xe^{x}\right]_{\lambda}^{0}$$

$$\int_{\lambda}^{0}(x+1)e^{x}dx=\left[0e^{0}-\lambda e^{\lambda}\right]=-\lambda e^{\lambda}$$

جـ)استنتاج حساب المساحة $A(\lambda)$

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}f(x).dx=\int_{\lambda}^{0}e^{2x}dx-\int_{\lambda}^{0}(x+1)e^{x}.dx$$

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}f(x).dx=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\lambda e^{\lambda}\right](u.a)$$

د)حساب $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$

لدينا: $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\lambda e^{\lambda}\right)=\frac{1}{2}$

وفقكم الله

في

بكالوريا

2010