التحـــــضير المـــــتواصل- بكـــــالوريا 2010 –

الموضـــــوع : الأعـداد الـــــمـــــركبة

التمرين 01 : isba2007@hotmail.fr

أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري .

$Z_1 = (2+i)(3-2i)$; $Z_2 = (\sqrt{3}-i)^2$

$Z_3 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$; $Z_4 = (1+2i)(1-2i)$

$Z_5 = (1+i)(2-3i)(1-i)$

$Z_6 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$Z_7 = \left[(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]^2$

التمرين 02 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول Z ، أكتب الحلول على الشكل الجبري

1- $2iZ - 3i + (1-i)Z = 0$

2- $\frac{Z}{Z-i} = 2+i$

3- $(iZ+2)(3Z-1+i) = 0$

التمرين 03 :

حل على $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول Z

1) $\bar{Z} + 1 + i = i\bar{Z} + 3$

2) $Z\bar{Z} + Z - \bar{Z} - 5 - 2i = 0$

3) $Z^2 + Z\bar{Z} - 4 - 6i = 0$

التمرين 04 :

1) أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي .

$Z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$; $Z_2 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$

$Z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$; $Z_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$Z_5 = +\sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $Z_6 = -2i$

2) أكتب الأعداد المركبة السابقة على الشكل الأسي .

التمرين 05 :

$Z = 1 - i$

1. عين الطويلة و عمدة للعدد المركب Z
2. استنتج الطويلة وعمدة للأعداد المركبة التالية :

Z^{2010}; Z^{2009} ; Z^4 ; iZ ; $\frac{1}{Z}$; $-3Z$; $2Z$; $-Z$; $\bar{Z}$

التمرين 06 :

أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة التالية :

$Z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $Z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$

$Z_3 = -2\left[cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right]$

$Z_4 = 4\left[cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right]$

التمرين 07 :

لتكن الأعداد المركبة $Z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3})$

$Z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ ، $Z_2 = \frac{Z}{Z_1}$

1) أكتب Z_2 على الشكل الجبري

2) عين الطويلة و عمدة للأعداد Z_1 ، Z_2 ثم Z .

3) استنتج القيم المضبوطة لـ : $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

4) أثبت أن العدد Z^{2010} تخيلي صرف .

التمرين 08 :

عين الجذرين التربيعيين للأعداد المركبة التالية :

$Z = -8 + 6i$, $Z = 4 + 3i$, $Z = -6 + 6\sqrt{3}i$

التمرين 09 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول Z

$2Z^2 - 6Z + 5 = 0$; $Z^2 - 8\sqrt{3}Z + 64 = 0$

$\theta \in \mathbb{R}$ حيث $Z^2 - 2(sin\theta)Z + 1 = 0$

التمرين 10 :

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$Z^2 - 6Z + 18 = 0$

2- ليكن العدد المركب $Z_1 = 3 - 3i$

أ. أكتب Z_1 على الشكل الأسي .

ب. أحسب طويلة العدد Z_3 و عمدة له حيث

$Z_1 \times Z_3 = 6(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

ج. استنتج قمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3- نعتبر في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس النقط A ، B ، C

صور الأعداد المركبة Z_1 ، $\overline{Z_1}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

أ. عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ مرجحا G .

ب. عين مجموعة النقط G حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$

التمرين 11 :

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة :

$Z^2 - 2Z + 4 = 0$

2) نسمي Z_1 ، Z_2 حلي هذه المعادلة

أ. أكتب العددين Z_1 ، Z_2 على الشكل الأسي

ب. A ، B ، C هي نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$Z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ج. عين الطويلة و عمدة للعدد المركب L حيث $L = \frac{c - Z_B}{Z_A - Z_B}$

ثم فسر النتائج هندسيا .

د. أحسب L^3 ، L^6 ثم استنتج أن L^{3k} حقيقي حيث k عدد طبيعي .

التمرين 12 :

نعتبر الأعداد المركبة التالية :

$Z_A = 1 + i$; $Z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $Z_C = 2Z_B$; $Z_D = 3e^{2i\pi}$

1) أنشئ النقط A , B , C , D

عمـــــــــاري

PREPARATION CONTINUE BAC 2010

2) أثبت أن النقط A, B, C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $\sqrt{5}$

عين الطويلة و عمدة لـ : $\frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_D}$ ثم استنتج طبيعة المثلث DAC

التمرين 13 : isba2007@hotmail.fr

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ، النقطتين A و B صورتي العددين المركبين $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$ و $Z_B = 1 - i\sqrt{3}$

1. أحسب $|Z_A|$ و $|Z_B|$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB
2. عين لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $OACB$ معين .
3. عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المعين $OACB$

. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث :

$$|Z - Z_A|^2 + |Z - Z_B|^2 + |Z - Z_C|^2 + |Z|^2 = 12$$

التمرين 14 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلتين

أ) $Z^2 - 2Z + 5 = 0$

الحلين Z_A و Z_C حيث $Im(Z_A) > 0$

ب) $Z^2 - 2(1 + \sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

الحلين Z_B و Z_D حيث $Im(Z_B) > 0$

2) أ) بين أن : $|Z_B - Z_A|^2 + |Z_B - Z_C|^2 = |Z_A - Z_C|^2$

ثم فسر هندسيا .

ب) أكتب معادلة للدائرة (δ) المحيطة بالمثلث ABC

بين أن D تنتمي إلى (δ) ثم أنشئ (δ) و A, B, C, D

التمرين 15 :

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = 0$$

1) أ- بين أن (-1) حل للمعادلة .

ب- عين العددين الحقيقين a ; b بحيث يكون

$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (Z + 1)(Z^2 + aZ + b)$

ج- عين مجموعة حلول المعادلة

2) نعتبر النقط A, B, C صور الأعداد $Z_A = -1$

$Z_B = 2 + i\sqrt{3}$, $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$

أ- مثل النقط A, B, C ثم عين طبيعة المثلث ABC

ب- عين النقطة G مرجح الجملة :

$\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

ج- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 6$$

التمرين 16 :

نضع من أجل كل عدد مركب Z :

$$P(Z) = Z^3 + (2\sqrt{3} - i)Z^2 + (4 - 2\sqrt{3}i)Z - 4i$$

1) أ- أحسب $P(i)$

ب- عين العددين الحقيقين a ; b بحيث يكون :

$P(Z) = (Z - i)(Z^2 + aZ + b)$

ج- حل المعادلة $P(Z) = 0$

2) نعتبر الأعداد المركبة :

$Z_3 = -\sqrt{3} + i$; $Z_2 = -\sqrt{3} - i$; $Z_1 = i$

أ- أكتب $\frac{Z_2}{Z_3}$ على الشكل المثلثي

ب- أكتب $\left(\frac{Z_2}{Z_3}\right)^{2010}$ على الشكل الجبري

ج- عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون :

$(Z_2 \times Z_3)^n = 64$

3) A, B, C صور الأعداد Z_1 ; Z_2 ; Z_3 على الترتيب

أ- عين النقطة G مرجح الجملة : $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$$2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2$$

التمرين 17 :

Z عدد مركب حيث $Z \neq 1$ و $Z = x + iy$ ، $M(x, y)$ صورة Z

نضع : $L = \frac{2 + \bar{Z}}{1 - \bar{Z}}$

1) عين الجزئيين الحقيقي و التخيلي لـ : L بدلالة x و y

2) بين أن مجموعة النقط M بحيث يكون L حقيقي هي مستقيم باستثناء نقطة .

3) بين أن مجموعة النقط M بحيث يكون L تخيلي صرف هي دائرة باستثناء نقطة .

التمرين 18 :

Z عدد مركب حيث $Z = x + iy$ ، $M(x, y)$ صورة Z نضع :

$L = \frac{Z - i}{Z - 1}$ حيث : $Z \neq 1$

عين الإجابة الصحيحة و الخاطئة :

1- مجموعة النقط M حيث L حقيقي هي مستقيم .

2- مجموعة النقط M حيث $\arg(L) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ هي دائرة باستثناء نقطة .

3- مجموعة النقط M حيث $|L| = 1$ هي دائرة .

4- مجموعة النقط M حيث $L\bar{L} = 4$ هي دائرة .

5- مجموعة النقط M حيث $L - \bar{L} = 0$ هي مستقيم .

التمرين 19 :

عين ثم أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z في الحالات التالية :

1) $|Z + 1 + 2i| = |Z - 4|$

2) $|Z - 1 - i| = \sqrt{2}$

3) $|\bar{Z} + i| = 2$

4) $Z = 1 + 2e^{i\theta}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

5) $Z = 2i + 2e^{i\theta}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

6) $\arg(Z - 1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

7) $\arg(Z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 20 :

1) أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ حيث Z هو المجهول .

ب. استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول Z :

$(\bar{Z} + 3)^2 - 2(\bar{Z} + 3) + 2 = 0$

حيث $\bar{Z}$ مرافق Z

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

النقط A ، B ، M لواحقها $(1 - i)$ ، $(1 + i)$ ، Z على الترتيب

أ- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$Z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$

عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$|Z - 1 + i| = |Z - 1 - i|$

عمـــــــاري

PREPARATION CONTINUE BAC 2010