الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) من أجل كل عدد مركب Z نضع : $P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$

أ- أحسب $P(-1)$

ب- عين العددين الحقيقيين a ، b بحيث يكون $P(Z) = (Z+1)(Z^2 + aZ + b)$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$ ، الحلول هي Z_0؛Z_1؛ Z_2 حيث Z_0 حقيقي و $Im(Z_1) > 0$

د- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{Z_1-1}{Z_2-1}\right)^n$ حقيقيا موجبا .

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ ، وحدة الطول $2\ cm$

نعتبر النقط A،B،C،G لواحقها : $Z_A = -1$ ؛ $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ ، $Z_G = 3$

أ- مثل النقط A ، B ، C ، G

ب- أحسب المسافات AB ، AC ، BC و استنتج طبيعة المثلث ABC

ج- عين عمدة للعدد المركب : $\frac{Z_A-Z_C}{Z_G-Z_C}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أ- أثبت أن النقطة G مرجح الجملة : $\{(A,-1);(B,2);(C,2)\}$

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12$

التمرين الثاني :

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول U_0 الموجب تماما و العلاقة : $U_{n+1} = \frac{5U_n+2}{U_n+4}$

1- عين العددين الحقيقيين a ، b بحيث يكون : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4}$

- برهن بالتراجع أن من أجل $n \in \mathbb{N}$ يكون $U_n > 0$

2- عين U_0 حتى تكون (U_n) ثابتة .

3- نفرض أن $U_0 = 3$ و نضع : $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

- ما هي قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية .
- حدد أساسها q و حدها الأول V
- أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n
- أحسب بدلالة n المجموع : $S = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \cdots + \frac{1}{V_n}$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(-3;-1;-3)$ و يوازي الشعاع $\vec{u}$ حيث : $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ، (D) مستقيم يشمل النقطة $B(3;2;3)$ و يوازي الشعاع $\vec{v}$ حيث $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1) أ- أحسب $\vec{u}.\vec{v}$

ب- بين أن المستقيمين (Δ) و (D) متعامدين و ليسا من نفس المستوي .

ج- عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي (Δ) و يوازي (D)

2) S سطح الكرة التي مركزها $C(-1;0;-1)$ و نصف قطرها 6 ، (P) المستوي المعرف بالمعادلة : $2x + y + 2z + 13 = 0$

أ – بين أن (P) يقطع (S) وفق دائرة مركزها A ؛ عين نصف قطر هذه الدائرة .

ب- بين أن المستقيم (D) مماس لـ (S) في النقطة B

التمرين الرابع :

$I)$ g دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

1- شكل جدول تغيرات الدالة g .

2- بين أنه من أجل $x > -1$ يكون $0 < g(x) < e$

$II)$ f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ ، الوحدة $5\ cm$

1- برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y - x + e - 1 = 0$ مقارب لـ (C_f)

2- أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) [استعمل الجزء I]

3- من أجل $x > -1$ أحسب $f'(x)$ ثم بين أن : $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}$

- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$
- بين أن : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 e^{\frac{x}{x+1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f'(x)$
- شكل جدول تغيرات f'
- برهن أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 و الآخر نرمز له α

4- شكل جدول تغيرات الدالة f

5- أثبت أن : $f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 1)$

6- عين معادلتي المماسين في النقطتين ذات الفاصلتين 0 و α ، ثم أنشئ المماسين ثم أنشئ (C_f) من أجل $\alpha = -0.72$