ثانوية بوشوشة- الـــوادي ﴿ شعبة: 3 علوم وتجريبية﴾

الحل النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبية دورة 2013

المادة: الرياضيات **الموضوع الثاني** **إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي**

التمرين الأول :(4.5 نقط)

1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3.

لدينا : $u_0 = 3$ و n ، $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$.

ومنه: $u_1 = \dfrac{u_0 + 4(0) + 4}{3} = \dfrac{7}{3}$

$u_2 = \dfrac{u_1 + 4(1) + 4}{3} = \dfrac{31}{9}$

$u_3 = \dfrac{u_2 + 4(2) + 4}{3} = \dfrac{139}{27}$

2- أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 > 0$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحّة $P(n+1)$

لدينا: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ومنه: $u_n + 4n > 4n$

ومنه $u_n + 4n + 4 > 4n + 4$ ومنه:

$\dfrac{u_n + 4n + 4}{3} > \dfrac{4n + 4}{3} \succ 0$ أذن $u_{n+1} > 0$

ب)استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $u_n > \dfrac{4}{3}n$

لدينا $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$ معناه $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4$

معناه $3u_n = u_{n-1} + 4n$

معناه $u_{n-1} = 3u_n - 4n$

ومنه $3u_n - 4n \succ 0$ لأن $u_{n-1} \succ 0$ $(n \geq 1)$

إذن $u_n > \dfrac{4}{3}n$ و هو المطلوب.

جـ) استنتاج نهاية المتتالية (u_n).

لدينا مما سبق أن $u_n > \dfrac{4}{3}n$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n > \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{3}n$

لكن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{3}n = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$

وذلك حسب مبرهنة الحدّ من الأسفل

3-أ)البرهان أن (v_n) **م.هـ و تعيين أساسها وحدها الأول**

(v_n) م.هندسية معناه $v_{n+1} = q.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = \dfrac{u_n + 4n + 4}{3} - 2n - 1$

$v_{n+1} = \dfrac{u_n - 2n + 1}{3} = \dfrac{(v_n + 2n - 1) - 2n + 1}{3} = \dfrac{1}{3}v_n$

أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2(0) + 1 = 4$

ب) استنتاج أن $u_n = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$:.

لدينا: $v_n = u_n - 2n + 1$ ومنه $u_n = v_n + 2n - 1$

ومنه $u_n = v_0.q^n + 2n - 1 = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

جـ)حساب بدلالة n **المجموع** S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0\left[\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right]$$

لدينا:

$$= 4\left[\dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)}\right] = 6\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

استنتاج بدلالة n **المجموع** T_n

$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ولدينا: $u_n = v_n + 2n - 1$ وعليه يكون T_n كمايلي:

$T_n = (v_0 + 2(0) - 1) + (v_0 + 2(0) - 1) + ... + (v_n + 2(n) - 1)$

$T_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + 2(0 + 1 + ... + n) - 1(n+1)$

$T_n = S_n + 2\dfrac{(n+1)(0+n)}{2} - 1(n+1)$

وأخيرا $T_n = 6\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + n^2 - 1$

التمرين الثاني : (4.5 نقط)

1)كتابة معادلة لسطح الكرة $S(A,AB)$

(S) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $MA^2=AB$

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=(3-1)^2+(1-0)^2+(0+2)^2$$

أي معادلة (S) هي: $(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=9$

2- بيان أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة B

نضع: $z=t$ حيث وسيط حقيقي

لدينا: $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$

الجملة تعني ان (Δ) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة B .

3-كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(P) يشمل النقطة A و يعامد المستقيم (Δ) .

لدينا: $A\in(P)$ و $\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع ناظمي له

ومنه معادلة (P) هي من الشكل: $-2x-y+z+d=0$

$A\in(P)$ معناه $d=2x_A+y_A-z_A=4$

ومنه (P) له معادلة من الشكل: $-2x-y+z+4=0$

4. أ-تعييّن احداثيات نقطة تقاطع (P) و (Δ) .

احداثيات نقطة تقاطع (P) و (Δ) هي حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-t+1 \\ z=t \\ -2x-y+z+4=0 \end{cases}$$

ومنه: $-2(-2t+3)-(-t+1)+t+4=0$ تكافئ $t=\frac{1}{2}$

وعليه: $x=2$ ، $y=\frac{1}{2}$ و $z=\frac{1}{2}$

ومنه: إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (Δ) هي $H(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

ب-حساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هي الطول AH

لأن (P) يعامد (Δ) في النقطة H

$$d(A;\Delta)=AH=\sqrt{(1-2)^2+(0-\frac{1}{2})^2+(2+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{30}}{2}$$

ج - استنتاج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين

(Δ) يقطع (S) في نقطتين لأن $d(A;\Delta)\prec R$

5- تبيان أن : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

لدينا: G مرجح الجملة $\{(C;1),(B;e^t)\}$

ومنه G تحقق العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{GC}+e^t\overrightarrow{GB}=\vec{0}...(1)$

(1) تكافئ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+e^t\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

تكافئ $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

لدينا: $\lim_{t\to-\infty} f(t)=1$ و $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$

ولدينا: $f'(t)=\frac{-e^t}{(1+e^t)^2}\prec 0$ ومنه f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f

t	$-\infty$	$+\infty$
f'(t)	-	
f(t)	1 ↘	0

- استنتاج مجموعة النقط G

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$ نستنتج ان

مجموعة النقط G هي المستقيم الذي يشمل النقطة B

ويوازي المستقيم (BC) عندما يمسح t المجموعة $\mathbb{R}$

حسب جدول التغيرات $t\in\mathbb{R}$ فإن $f(t)\in]0;1[$

وعليه مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي

القطعة $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C .

التمرين الثالث (04نقط)

1-أ) اكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي .

لدينا: $z_A=-2i=2(0-1i)=2e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$$z_B=-\sqrt{3}+i=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

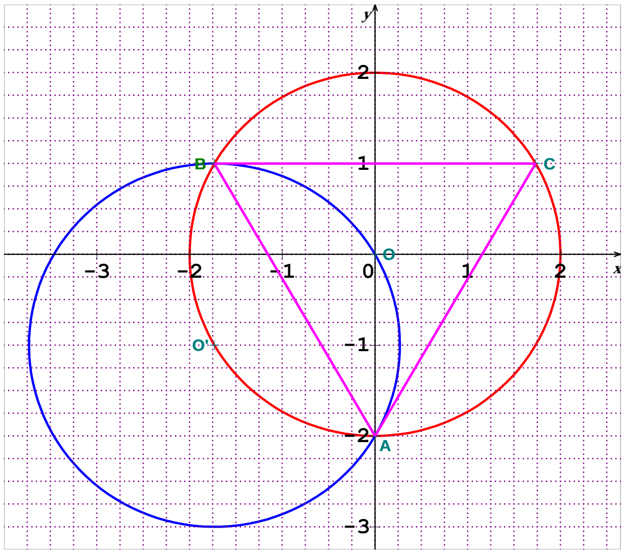
$$z_C=\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

ب)استنتاج مركز ونصف قطر الدائرة (C)

لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ ومنه النقط A ، B ، C

تنتمي لدائرة واحدة مركزها O ونصف قطرها 2

ج) تعليم النقط A ، B ، C ثم رسم الدائرة (C)



2-أ)كتابة $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسي

<u>الشكل الجبري</u> $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

بعد ضرب حدي الكسر في مرافق المقام نجد النتيجة

<u>الشكل الأسي</u> $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب)استنتاج طبيعة المثلث ABC

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ومنه: $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$

نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3-أ) تبيان أن O' صورة النقطة O بالدوران r

العبارة المركبة للدوران $r(A;\frac{\pi}{3})$ هي :

$z'=az+(1-a)z_A$ حيث: $a=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ومنه:

$z_{O'}=az_O+(1-a)z_A=(1-a)z_A=-\sqrt{3}-i$

ج)تبيان أن $[O'C]$ قطرا للدائرة (C)

$O'C=|z_c-z_{O'}|=|2\sqrt{3}+2i|=\sqrt{16}=4$

ج)التحقق أن (C) و(C') تشتركان في النقطتين A و B

يكفي التحقق من أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة (C')

لدينا: $O'A=|z_A-z_{O'}|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{4}=2$

$O'B=|z_B-z_{O'}|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{4}=2$

<u>التمرين الرابع</u> (07نقط)

تشكيل جدول تغيرات g بقراءة بيانية .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	- ||	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗	-5	↘ $-\infty$ || $-\infty$	↗ $+\infty$

1) تبيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة g متزايدة ومستمرة على المجال $]0;+\infty[$

$g(1,07)\times g(1,09)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث:

$1,07\prec\alpha\prec1,09$ يحقق: $g(\alpha)=0$.

2)استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}^*$.

مما سبق نستنتج اشارة ان $g(x)$ تكون كما يلي.

$x\in]-\infty;\alpha[$ معناه $g(x)\in]-\infty;0[$ أي $g(x)\prec 0$

$x\in]\alpha;+\infty[$ معناه $g(x)\in]0;+\infty[$ أي $g(x)\succ 0$

1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ثم تفسير النتيجة الاخيرة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-3\frac{\ln|x|}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-3\frac{\ln|x|}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x-3\frac{\ln|x|}{x^2})=\lim_{x\to0}(-3\frac{\ln|x|}{x^2})=+\infty$$

إذن (C_f) يقبل مستقيم كمقارب عمودي معادلته $x=0$

2. أ- تبيان انه من $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{x^4}$

$$f'(x)=2-3\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x.\ln|x|}{x^4}=\frac{2x^4-3x(1-2.\ln|x|)}{x^4}$$

$$=\frac{x(2x^3-3+6\ln|x|)}{x^4}=\frac{x.g(x)}{x^4}$$

ب-استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات $f(x)$

نستنتج أن اشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x.g(x)$ و هي حسب الجدول التالي

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	-	|| +	0	+
$g(x)$	-	|| -		+
$f'(x)$	+	|| -		+

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

جـ-تبيان ان $f(\alpha)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$ **واستنتاج حصرا لـ** $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha)=2\alpha-3\frac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$

$g(\alpha)=0$ معناه $2\alpha^3-3+6\ln|\alpha|=0$ أي $\ln|\alpha|=-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha-\frac{3}{\alpha^2}\left(-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}\right)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$

حصر $f(\alpha)$ نضع: $1,07\prec\alpha\prec1,09.....(1)$

(1) تكافئ $3,21\prec3\alpha\prec3,27....(2)$

(1) تكافئ $1,144\prec\alpha^2\prec1.188$ تكافئ $2,28\prec2\alpha^2\prec2,36.$

تكافئ $\frac{3}{2,36}\prec\frac{3}{2\alpha^2}\prec\frac{3}{2,28}....(3)$

من(2)و(3) نجد: $3,21-\frac{3}{2,28}\prec3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}\prec3,27-\frac{3}{2,36}$

وأخيرا $1,92\prec f(\alpha)\prec2,01$

3. أ- بيان ان (D) : $y=2x$ مقارب مائل لـ (C_f)

لدينا: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\to+\infty}3\frac{\ln|x|}{x^2}=0$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم (D) كمقارب مائل في جوار $\pm\infty$

ب- ادرس وضعية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D)

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=-3\frac{\ln|x|}{x^2}$

$f(x)-y=0$ معناه $\ln|x|=0$ معناه $|x|=1$ معناه $x=\pm1$

$f(x)-y\prec0$ معناه $\ln|x|\succ0$ معناه $|x|\succ1$ أي $x\succ1$ أو $x\prec-1$

$f(x)-y\succ0$ معناه $\ln|x|\prec0$ معناه $|x|\prec1$ أي $-1\prec x\prec1$

ومنه وضعية (C_f) بالنسبة الى (D) تكون كمايلي:

1) $x=\pm1$ معناه (C_f) يقطع (D) في نقطتين

2) $x\succ1$ أو $x\prec-1$ معناه (C_f) تحت (D).

3) $-1\prec x\prec1-\{0\}$ (C_f) فوق (D).

4.أ-بيان وجود مماس (Δ) لـ (C_f) يوازي (D) ويمس (C_f) في نقطتين .يطلب اعطاء معادلة لهذا المماس .

نبين أن المعادلة $f'(x_0)=2$ تقبل حليّن متمايزين

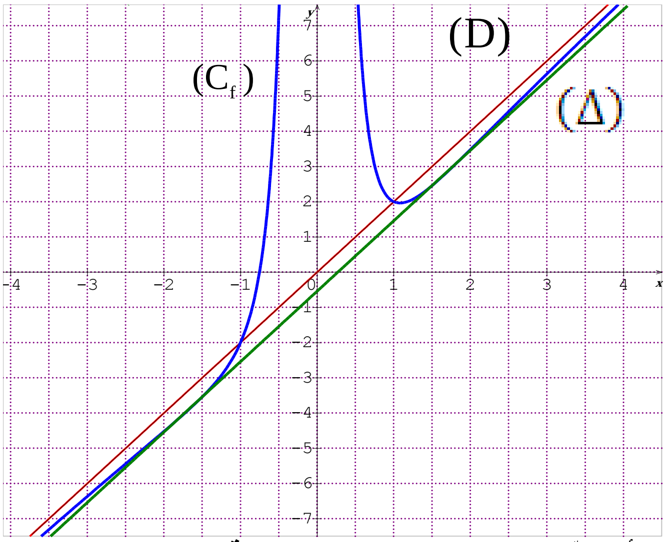
$f'(x_0)=2$ معناه $\frac{x_0.g(x_0)}{x_0^4}=2$ معناه $-3+6\ln|x_0|=0$

$-3+6\ln|x_0|=0$ معناه $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$

اعطاء معادلة لهذا المماس

$$(\Delta): y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})=2x-\frac{3}{2e}$$

ب- إنشاء (Δ) و (D) و (C_f).



5.أ-تعيين عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx^2+3\ln x=0$

$mx^2+3\ln x=0......(*)$ تكافئ $m=-\frac{3\ln x}{x^2}$

(*) تكافئ $2x+m=f(x)$ تكافئ $y=f(x)$ و $y=2x+m$

وعليه حلول المعادلة (*) هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

و المستقيم ذو المعادلة $y=2x+m$ له نفس المنحى مع (Δ)

من البيان نميز الحالات التالية

1) $m\prec-1,5e^{-1}$ المعادلة لا تقبل حلول.

2) $m=-1,5e^{-1}$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

3) $-1,5e^{-1}\prec m\prec-2$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب

4) $m\geq-2$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

ب- تعيّين العددين الحقيقيين a ، b

h الدالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln|x|}{x^2}$ معناه $h'(x)=\frac{\ln|x|}{x^2}$

ومنه $\frac{\ln|x|}{x^2}=\frac{b-a-b\ln|x|}{x^2}$ ومنه: $a=b=-1$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

نسمي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

$F(x)=x^2-3h(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي